

# Over het aansluiten van puntenvelden (4): Toepassingen en voorbeelden<sup>1)</sup>

door dr. ir. P. J. G. Teunissen, ir. M. A. Salzmann en ir. H. M. de Heus, Faculteit der Geodesie van de Technische Universiteit Delft.

## SUMMARY

### On the connection of pointfields — applications and examples

In this article applications and examples concerning the adjustment for the connection of pointfields are given. The general two-dimensional linear least squares adjustment for connecting pointfields, the calibration of a digitizer, the analytical absolute orientation of a photogrammetric stereomodel and the method of the „free-station“ are discussed as examples. Results are given in analytical form.

## 1. Inleiding

In de voorgaande artikelen van onze serie [1], [2] en [3]<sup>2)</sup> hebben we de theoretische grondslagen van de aansluitingsproblematiek uiteengezet. Voor het uitvoeren van de aansluitingsvereffening hebben we een algoritme afgeleid.

De reden dat we de aansluitingsvereffening zo uitvoerig hebben behandeld, ligt in het feit dat in de landmeetkundige praktijk de aansluiting een steeds belangrijkere rol gaat spelen. We doelen daarbij niet alleen op het aansluiten van landmeetkundige netwerken, maar op het totale scala van aansluitingsproblemen, zoals we dat in onze algemene inleiding [1] hebben geschetst. Zie als voorbeelden van aansluitingsproblemen ook [4], [5] en [6] in deze jaargang van NGT Geodesia.

Wij behandelen in dit artikel een aantal voorbeelden om de door ons behandelde aansluitingsvereffening te illustreren. In het tweede artikel van onze serie [2] hebben we al een getallenvoorbeeld van de aansluitingsvereffening van twee waterpasnetwerken gegeven. Het zal de lezer daar duidelijk zijn geworden hoe groot de invloed van de coördinaatdefinitie is op de uiteindelijk verkregen coördinaten en hun variantiematrices.

We hebben met een ander getallenvoorbeeld laten zien (zie tabel 2 in [2]) dat bepaalde termen onafhankelijk van de gekozen coördinaatdefinitie zijn. Deze termen spelen een belangrijke rol in de beschrijving van de toetsing en betrouwbaarheid bij de aansluitingsvereffening [3]. Het nadeel van getallenvoorbeelden is echter, dat deze meestal slechts betrekking hebben op de in het voorbeeld gegeven situatie; algemene gevolgtrekkingen zijn dikwijls moeilijk uit een dergelijk voorbeeld te maken. Daarom hebben we in dit artikel ervoor gekozen onze voorbeelden analytisch te behandelen. De lezer krijgt misschien de indruk (als ook de voorbeelden analytisch worden gegeven) dat alles wat met de aansluitingsvereffening te maken heeft, alleen in formules is uit te drukken. We zullen echter zien, dat juist deze analytische opzet het komen tot (algemene) gevolgtrekkingen mogelijk maakt. De lezer kan de resultaten eenvoudig toepassen op zijn eigen specifieke omstandigheden, en daarbij (hopelijk) komen tot een nog beter inzicht in de bijzonderheden van de aansluitingsvereffening.

Achtereenvolgens worden de LKK-aansluiting, de kalibratie van een digitizer, het absoluut oriënteren van een fotogrammetrisch stereomodel en de vrije opstelling als voorbeeld van het aansluiten van puntenvelden behandeld.

We gaan in onze voorbeelden uit van reguliere covariantiematrices van de coördinaten (in casu diagonaalmatrices). Deze concessie aan de algemeenheid is gedaan om tot hanteerbare analytische oplossingen te komen. Deze concessie betekent echter geenszins, dat de gegeven voorbeelden onrealistisch zijn, zolang we maar met de gekozen covariantiematrix van de coördinaten de precisie van de schatbare functies goed kunnen beschrijven.

## 2. Tweedimensionale LKK-aansluiting

In dit voorbeeld zullen we laten zien hoe de tweedimensionale aansluitingsvereffening analytisch kan worden uitgevoerd. De te beschouwen aansluitingsvereffening wordt in de literatuur door sommigen ook wel overbepaalde gelijkvormigheidstransformatie genoemd. Deze terminologie is niet eenduidig, zodat we hier steeds over de tweedimensionale aansluitingsvereffening zullen spreken.

Met [2] - (4) is het algemene (gelineariseerde) model voor de aansluitingsvereffening gegeven als:

$$(1) \quad E \begin{Bmatrix} \bar{x}_1^{(1)} \\ \bar{x}_2^{(1)} \\ \bar{x}_2^{(2)} \\ \bar{x}_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & & & \\ & I & & \\ & & I & v_2^\perp \\ & & & I & v_3^\perp \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ t \end{Bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} q_{11}^{(1)} & q_{12}^{(1)} & & 0 \\ q_{21}^{(1)} & q_{22}^{(1)} & & \\ & & q_{22}^{(2)} & q_{23}^{(2)} \\ & & q_{32}^{(2)} & q_{33}^{(2)} \end{bmatrix}$$

In hoofdstuk 3 van [2] hebben we laten zien, dat we op efficiënte wijze een oplossing van (1) kunnen vinden. We berekenen daartoe eerst met behulp van een sterk gereduceerd model van (1), namelijk

$$(2) \quad E \{ d \} = -v_2^\perp t; \quad Q_d$$

met

$$d \triangleq \bar{x}_2^{(1)} - \bar{x}_2^{(2)}$$

$$Q_d \triangleq q_{22}^{(1)} + q_{22}^{(2)}$$

<sup>1)</sup> Slot van de miniserie over het aansluiten van puntenvelden. Deel 1, 2 en 3 zijn geplaatst in het mei-, juni-, juli/augustus-, september- en oktobernummer van NGT Geodesia. Ook dit deel wordt geplaatst in tweeën; het vervolg zult u aantreffen in het decembernummer.

<sup>2)</sup> De nummers [1] t.m. [7] verwijzen naar „Literatuur“ op p. 462 aan het eind van dit artikel.

de oplossing van de transformatieparameters  $t$ . Met behulp van de formule van de „ $x^R$ -grootheden” en de in het gereduceerde model berekende transformatieparameters  $\hat{t}$  vinden we tenslotte de oplossing voor het gehele model (1); zie [2]-(13):

$$a) \quad \hat{t} = -(v_2^{1*} Q_d^{-1} v_2^{\perp})^{-1} v_2^{1*} Q_d^{-1} d$$

$$(3) \quad b) \quad \hat{d} = -v_2^{\perp} \hat{t}$$

$$c) \quad \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1^{(1)} \\ \bar{x}_2^{(1)} \\ \bar{x}_2^{(2)} \\ \bar{x}_3^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -Q_{12}^{(1)} \\ -Q_{22}^{(1)} \\ Q_{22}^{(2)} \\ Q_{32}^{(2)} \end{pmatrix} Q_d^{-1} (d - \hat{d}) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -v_2^{\perp} \\ -v_3^{\perp} \end{pmatrix} \hat{t}$$

We bouwen ons voorbeeld van de aansluitingsvereffening op aan de hand van (2) en (3). We voeren nu de volgende notatie in (met  $n$  is het aantal aansluitpunten):

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = (x_{2_1}^{0(1)}, \dots, x_{2_n}^{0(1)})^* \\ v = (y_{2_1}^{0(1)}, \dots, y_{2_n}^{0(1)})^* \\ e_n = (1, \dots, 1)^* \\ d_x = (\bar{x}_2^{(1)} - \bar{x}_2^{(2)}) \\ d_y = (\bar{y}_2^{(1)} - \bar{y}_2^{(2)}) \\ [u] = \sum_{i=1}^n u_i \\ \bar{u}_i = u_i - \frac{[u]}{n}, \quad (\bar{u}_i \text{ zijn coördinaten} \\ \text{t.o.v. het zwaartepunt}) \end{array} \right.$$

Met

$$t = (\Delta t_x, \Delta t_y, \Delta \lambda, \Delta \alpha)^*$$

wordt, gebruikmakend van de notatie van (4):

$$(5) \quad v_2^{\perp} = \begin{pmatrix} e_n & 0 & u & v \\ 0 & e_n & v & -u \end{pmatrix}$$

We nemen aan, dat de covariantiematrices van de netwerken (1) en (2) regulier zijn. In principe kan voor de analytische oplossing worden gewerkt met rotatie-invariante covariantiematrices. Deze opzet is beschreven in [7]. In dit voorbeeld zullen voor beide covariantiematrices verschillend geschaalde eenheidsmatrices worden gekozen.

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_{\bar{x}}^{(1)} = \alpha^2 I \\ Q_{\bar{x}}^{(2)} = \beta^2 I \\ \text{met } \alpha^2 \text{ en } \beta^2 \text{ in [meter}^2\text{]} \end{array} \right.$$

Dit is een vergaande vereenvoudiging van het kansmodel. Het gekozen kansmodel is te rechtvaardigen in die gevallen, waarin we de precisie van de schatbare functies met behulp van dit kansmodel voldoende goed kunnen beschrijven, of informatie over de precisie van de aan te sluiten coördinaten ontbreekt; men denke bijvoorbeeld aan het (gelijkvormig) aansluiten van twee in

de loop der jaren opgebouwde coördinaatbestanden. Uitgaande van (2) komen we dan tot de volgende normaalvergelijkingen:

$$(7) \quad (v_2^{1*} Q_d^{-1} v_2^{\perp}) \hat{t} = -v_2^{1*} Q_d^{-1} d,$$

$$\text{met } Q_d = (\alpha^2 + \beta^2) I$$

Uitgeschreven, met (4) en (5):

$$(8) \quad \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2)} \begin{pmatrix} n & 0 & [u] & [v] \\ 0 & n & [v] & -[u] \\ [u] & [v] & u^* u + v^* v & 0 \\ [v] & -[u] & 0 & u^* u + v^* v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t_x \\ \Delta t_y \\ \Delta \lambda \\ \Delta \alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{(\alpha^2 + \beta^2)} \begin{pmatrix} [d_x] \\ [d_y] \\ u^* d_x + v^* d_y \\ v^* d_x - u^* d_y \end{pmatrix}$$

Dit stelsel normaalvergelijkingen is eenvoudig op te lossen door de onbekenden  $\Delta t_x$  en  $\Delta t_y$  uit de normaalvergelijkingen te elimineren:

$$(9) \quad \begin{array}{l} \Delta t_x = 1/n(-[u]\Delta\lambda - [v]\Delta\alpha + [d_x]) \\ \Delta t_y = 1/n(-[v]\Delta\lambda + [u]\Delta\alpha + [d_y]) \end{array}$$

Substitutie van (9) in de normaalvergelijkingen levert met gebruikmaking van

$$\begin{array}{l} \bar{u}^* = u^* - 1/n[u]e_n^* \text{ en} \\ \bar{v}^* = v^* - 1/n[v]e_n^* \end{array}$$

de oplossing voor de schaal- en rotatieparameters.

$$(10) \quad \begin{pmatrix} \Delta \lambda \\ \Delta \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{\bar{u}^* \bar{u} + \bar{v}^* \bar{v}} \begin{pmatrix} -\bar{u}^* & -\bar{v}^* \\ -\bar{v}^* & \bar{u}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix}$$

De translatieparameters  $\Delta \bar{t}_x$  en  $\Delta \bar{t}_y$  vindt men door substitutie van oplossing (10) in (9).

Merk op, dat de schatting van de transformatieparameters *onafhankelijk* is van de keuze van  $\alpha^2$  en  $\beta^2$ . Formules (9) en (10) laten o.a. zien dat men de precisie van de transformatieparameters kan verbeteren door het aantal aansluitpunten ( $n$ ) te vergroten of de aansluitpunten verder uit elkaar te kiezen. Beide strategieën leiden namelijk tot een vergroting van de term  $\bar{u}^* \bar{u} + \bar{v}^* \bar{v}$ . Nu de transformatieparameters bekend zijn, kunnen we overgaan tot de eigenlijke coördinaatberekening en kwaliteitsbeschrijving van de aansluiting. In (3) zien we, dat we daarvoor de term  $Q_d^{-1}(d - \hat{d})$  nodig hebben, welke te schrijven is als, zie [2]-(53):

$$(11) \quad Q_d^{-1}(d - \hat{d}) = (Q_d^{-1} - Q_d^{-1} v_2^{\perp} [v_2^{1*} Q_d^{-1} v_2^{\perp}]^{-1} v_2^{1*} Q_d^{-1}) d$$

De inverse van de normaalmatrix, zie (8), die we voor de berekening van (11) nodig hebben, is analytisch te bepalen:

$$(12) \quad (v_2^{1*} Q_d^{-1} v_2^{\perp})^{-1} =$$

$$= \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{n(\bar{u}^* \bar{u} + \bar{v}^* \bar{v})} \begin{pmatrix} u^* u + v^* v & 0 & -[u] & -[v] \\ 0 & u^* u + v^* v & -[v] & [u] \\ -[u] & -[v] & n & 0 \\ -[v] & [u] & 0 & n \end{pmatrix}$$

Na enig rekenwerk vindt men voor (11):

$$(13) \quad Q_d^{-1}(d-\hat{d}) = \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2)} \begin{pmatrix} I - \frac{e_n e_n^*}{n} - \frac{\bar{u}\bar{u}^* + \bar{v}\bar{v}^*}{\bar{u}\bar{u} + \bar{v}\bar{v}} & \frac{\bar{v}\bar{u}^* - \bar{u}\bar{v}^*}{\bar{u}\bar{u} + \bar{v}\bar{v}} \\ \frac{\bar{u}\bar{v}^* - \bar{v}\bar{u}^*}{\bar{u}\bar{u} + \bar{v}\bar{v}} & I - \frac{e_n e_n^*}{n} - \frac{\bar{u}\bar{u}^* + \bar{v}\bar{v}^*}{\bar{u}\bar{u} + \bar{v}\bar{v}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix}$$

Met [2]-(67') is  $Q_d^{-1}(d-\hat{d})$  te schrijven als:

$$(14) \quad Q_d^{-1}(d-\hat{d}) = \Phi d$$

Als oplossing van (3) vinden we tenslotte:

$$(15) \quad \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1^{(1)} \\ \hat{x}_2^{(1)} \\ \hat{x}_3^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha^2 I \\ \beta^2 I \\ 0 \end{pmatrix} \Phi d + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -V_2^1 \\ -V_3^1 \end{pmatrix} t$$

Door onze keuze van het kansmodel, waarbij geen correlatie is verondersteld tussen de aansluitpunten en de overige punten in de netwerken (1) en (2), krijgen de coördinaten  $\hat{x}_1^{(1)}$  geen correctie. De coördinaten  $\hat{x}_3^{(2)}$  worden met de berekende transformatieparameters getransformeerd naar stelsel (1).

De correcties van de coördinaatverschillen (we zullen deze nodig hebben bij de toetsing) zijn te berekenen als:

$$(16) \quad \begin{aligned} \hat{\epsilon}_d &= - (d - \hat{d}) \\ &= - Q_d Q_d^{-1} (d - \hat{d}) \\ &= - Q_d \Phi d \\ &= - (d - V_2^1 t) \end{aligned}$$

Een correctie aan een x-coördinaat-, respectievelijk y-coördinaatverschil kunnen we met behulp van (13) schrijven als

$$(17) \quad \begin{aligned} \hat{\epsilon}_{d_{x_i}} &= - \left( \bar{d}_{x_i} - \frac{\bar{u}_i (\bar{u}^* d_x + \bar{v}^* d_y) + \bar{v}_i (\bar{v}^* d_x - \bar{u}^* d_y)}{\bar{u}^* \bar{u} + \bar{v}^* \bar{v}} \right) \\ \hat{\epsilon}_{d_{y_i}} &= - \left( \bar{d}_{y_i} - \frac{\bar{u}_i (\bar{u}^* d_y - \bar{v}^* d_x) + \bar{v}_i (\bar{v}^* d_y + \bar{u}^* d_x)}{\bar{u}^* \bar{u} + \bar{v}^* \bar{v}} \right) \end{aligned}$$

Nu we de aansluitingsvereffening hebben uitgevoerd, moeten we de aannamen omtrent het mathematisch model, de zgn. nulhypothese, controleren. We voeren daartoe de *globale toets* uit om te constateren of de nulhypothese mogelijk onjuist is, zie [3]-(30).

$$(18) \quad T_{2n-4} = \hat{\epsilon}_d^* Q_d^{-1} \hat{\epsilon}_d$$

met een verdeling als in [3]-(26).

Met (16) zien we dat (18) kan worden geschreven als

$$(19) \quad T_{2n-4} = d^* \Phi d$$

ofwel

$$(20) \quad T_{2n-4} = \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2)} (d_x^* d_y^*) \cdot \begin{pmatrix} I - \frac{e_n e_n^*}{n} - \frac{\bar{u}\bar{u}^* + \bar{v}\bar{v}^*}{\bar{u}\bar{u} + \bar{v}\bar{v}} & \frac{\bar{v}\bar{u}^* - \bar{u}\bar{v}^*}{\bar{u}\bar{u} + \bar{v}\bar{v}} \\ \frac{\bar{u}\bar{v}^* - \bar{v}\bar{u}^*}{\bar{u}\bar{u} + \bar{v}\bar{v}} & I - \frac{e_n e_n^*}{n} - \frac{\bar{u}\bar{u}^* + \bar{v}\bar{v}^*}{\bar{u}\bar{u} + \bar{v}\bar{v}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix}$$

Merk op dat de correlatieterm in (13) en (20) verdwijnt, indien de term  $\bar{u}\bar{v}^*$  in (20) symmetrisch is. Dit is bijvoorbeeld het geval als de aansluitpunten op één lijn

liggen. Een dergelijke situatie zal echter bij een aansluitingsprobleem niet dikwijls optreden.

We zullen in het kader van ons voorbeeld van de aansluitingsvereffening drie alternatieve hypothesen nader onderzoeken:

- (1) een mogelijke fout in een enkele waarneming (de zgn. conventionele alternatieve hypothese);
- (2) een mogelijke fout in (de twee coördinaten van) een aansluitpunt;
- (3) een mogelijke affiene vervorming.

We toetsen met de B-methode van toetsen, zodat geldt:

$$(21) \quad \lambda_i = \lambda(\alpha_i, \beta_0, b) = \text{constant}$$

*Ad (1): enkele coördinaat fout*

Indien we bijvoorbeeld een fout in een x-coördinaat veronderstellen, dan wordt de  $C_i$ -matrix een vector:

$$(22) \quad c_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0; 0, \dots, 0)^*_{2n \times 1}$$

Gebruikmakend van [3]-(69), [3]-(70), (13) en (16) wordt de toetsgrootheid behorende bij deze alternatieve hypothese:

$$(23) \quad T_1 = \frac{\hat{\epsilon}_{d_{x_i}}^2}{(\alpha^2 + \beta^2) \left( 1 - \frac{1}{n} - \frac{\bar{u}_i^2 + \bar{v}_i^2}{\bar{u}^* \bar{u} + \bar{v}^* \bar{v}} \right)}$$

met een verdeling als in [3]-(34).

De term opgebouwd uit de (elementen van)  $\bar{u}$  en  $\bar{v}$  in de noemer van (23) zullen we in dit voorbeeld vaker tegenkomen. De term is niets anders dan het quotiënt van het kwadraat van de afstand van het zwaartepunt van de aansluitpunten naar aansluitpunt i en de som van kwadraten van afstanden van het zwaartepunt naar alle aansluitpunten. De grootte van deze term zal men vaak makkelijk kunnen afschatten.

De bij deze alternatieve hypothese behorende grenswaarde is met behulp van [3]-(46) te schrijven als:

$$(24) \quad c_i |\nabla_i| = c_i \sqrt{\frac{(\alpha^2 + \beta^2) \lambda_i}{\left( 1 - \frac{1}{n} - \frac{\bar{u}_i^2 + \bar{v}_i^2}{\bar{u}^* \bar{u} + \bar{v}^* \bar{v}} \right)}}$$

*Ad (2): aansluitpunt fout*

Met

$$(25) \quad c_i = \begin{pmatrix} 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0; 0, \dots, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0 \end{pmatrix}^*_{2n \times 2}$$

vinden we voor de toetsgrootheid behorende bij deze alternatieve hypothese:

$$(26) \quad T_2 = \frac{\hat{\epsilon}_{d_{x_i}}^2 + \hat{\epsilon}_{d_{y_i}}^2}{(\alpha^2 + \beta^2) \left( 1 - \frac{1}{n} - \frac{\bar{u}_i^2 + \bar{v}_i^2}{\bar{u}^* \bar{u} + \bar{v}^* \bar{v}} \right)}$$

met een verdeling als in [3]-(26).

In ons voorbeeld is de grenswaarde-ellips een cirkel (de inwendige betrouwbaarheid is dus in alle richtingen gelijk). De straal van deze cirkel is:

$$(27) \quad |\nabla_i|_Y = \sqrt{\frac{(\alpha^2 + \beta^2) \lambda_i}{\left( 1 - \frac{1}{n} - \frac{\bar{u}_i^2 + \bar{v}_i^2}{\bar{u}^* \bar{u} + \bar{v}^* \bar{v}} \right)}}$$

en daarmee is in elke richting de grenswaarde gelijk aan die van de conventionele alternatieve hypothese.

Ad (3): affine vervorming

Indien we een mogelijke affine vervorming onderzoeken, dan wordt

$$(28) \quad C_i = \begin{pmatrix} u^* & -v^* \\ v^* & u^* \end{pmatrix}^*$$

Met [3]-(32) vindt men — na enig rekenwerk — voor de toetsgrootheid:

$$(29) \quad T_2 = \frac{\bar{u}^* \bar{u} + \bar{v}^* \bar{v}}{(\alpha^2 + \beta^2) \cdot 4(\bar{u}^* \bar{u} \bar{v}^* \bar{v} - (\bar{u}^* \bar{v})^2)}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\epsilon}_{d_x}^* & \hat{\epsilon}_{d_y}^* \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} uu^* + vv^* & vu^* - uv^* \\ uv^* - vu^* & uu^* + vv^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\epsilon}_{d_x} \\ \hat{\epsilon}_{d_y} \end{pmatrix}$$

met een verdeling als in [3]-(26). In dit geval vinden we voor de grenswaarde-ellips eveneens een cirkel met straal

$$(30) \quad |\nabla_i|_{\gamma} = \sqrt{\frac{(\alpha^2 + \beta^2) \lambda_i}{4(\bar{u}^* \bar{u} \bar{v}^* \bar{v} - (\bar{u}^* \bar{v})^2) \frac{\bar{u}^* \bar{u} + \bar{v}^* \bar{v}}{2}}}$$

We kunnen de term

$$(31) \quad \frac{4(\bar{u}^* \bar{u} \bar{v}^* \bar{v} - (\bar{u}^* \bar{v})^2)}{\bar{u}^* \bar{u} + \bar{v}^* \bar{v}}$$

die in (29) en (30) voorkomt, nader analyseren. We gebruiken daartoe het inwendig product van de vectoren  $u$  en  $v$ . Het inwendig product is gedefinieerd als:

$$(32a) \quad \langle u, v \rangle = u^T v = u^* v^*$$

of

$$(32b) \quad \langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cos \phi_{u,v}$$

met  $\phi_{u,v}$  de hoek tussen de vectoren  $u$  en  $v$ . We kunnen met behulp van (32) term (31) schrijven als

$$(33) \quad \frac{4(\|\bar{u}\|^2 \|\bar{v}\|^2 (1 - \rho^2))}{\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2}$$

met

$$(1 - \rho^2) = 1 - \cos^2 \phi_{\bar{u}, \bar{v}}$$

We kunnen  $\rho^2$  zien als een maat voor de geometrische correlatie tussen de vectoren  $\bar{u}$  en  $\bar{v}$  (zie fig. 1, waar we voor twee puntenvelden deze term illustreren).

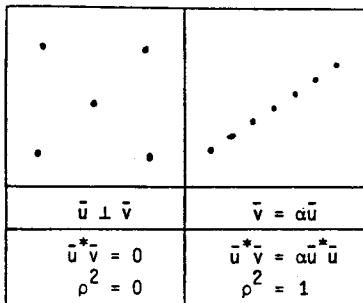


Fig. 1. Geometrische correlatie tussen  $\bar{u}$  en  $\bar{v}$ .

We zien dan dat, indien alle aansluitpunten op één lijn liggen, de inwendige betrouwbaarheid (30) oneindig slecht wordt — (33) wordt dan namelijk 0 — zodat we in een dergelijk geval niet op een affine vervorming

kunnen toetsen. Naarmate de aansluitpunten regelmatig zijn verdeeld, kunnen we scherper op een mogelijke affine vervorming toetsen.

Nadat we de toetsing en de inwendige betrouwbaarheidsbeschrijving van de aansluitingsvereffening hebben beschreven, dient nog de uitwendige betrouwbaarheid te worden geanalyseerd. Zoals bekend [3] zijn bij een aansluitingsvereffening drie klassen van alternatieve hypothesen van toepassing voor de beschrijving van de uitwendige betrouwbaarheid.

In het algemeen zullen bij een aansluitingsvereffening de  $\lambda$ -grootheden, namelijk  $\lambda_{i,x_1,x_2}^{(1)}$  en  $\lambda_{i,x_2,x_3}^{(2)}$  niet meer beschikbaar zijn. Men zal dan om tot een betrouwbaarheidsbeschrijving te komen voor de alternatieve hypothese  $H_A$  — een modelfout in  $E\{\hat{x}^{(1)}\}$  ten gevolge van een onontdekte fout in netwerk (1) — of  $H_C$  — een modelfout in  $E\{\hat{x}^{(2)}\}$  ten gevolge van een onontdekte fout in netwerk (2) — afschattingen moeten maken. Indien men dan bovendien een idee van de grootte van de betrouwbaarheid in het deelnet van de aansluitpunten in beide netwerken heeft ( $\lambda_{i,x_1,x_2}^{(1)}$  en  $\lambda_{i,x_2,x_3}^{(2)}$ ) dan kan men met behulp van de benaderingsformules [3]-(86) en [3]-(91) een redelijke afschatting maken van de uitwendige betrouwbaarheid behorend bij deze alternatieve hypothesen. De exacte formules [3]-(82) en [3]-(90) zal men slechts in bijzondere gevallen kunnen toepassen.

Voor een mogelijke modelfout in  $E\{\hat{x}_2^{(1)}\}$  of  $E\{\hat{x}_2^{(2)}\}$ , de alternatieve hypothese  $H_B$ , kan men echter wel de uitwendige betrouwbaarheid berekenen. We gaan daarvoor in dit voorbeeld uit van [3]-(89'):

$$(34) \quad \lambda_{i,x_2}^B = \nabla_i x_2^{(1)*} P_{s_2}^* [P_{s_2} Q_{x_2}^{(1)} P_{s_2}^* + S_{s_2}^{-1} S_{s_2}^{-1}]^{-1} P_{s_2} \nabla_i x_2^{(1)} - \lambda_i$$

We beperken ons dus tot het deelnet van de aansluitpunten. De toepassing van (34) is in ons voorbeeld eenvoudiger dan het voortplanten van de grenswaarden met behulp van (15) en de berekening van  $\lambda_{i,x_2}^B$  met behulp van [3]-(60) of [3]-(63). Met [3]-(68) geldt:

$$(35) \quad P_{s_2}^* [P_{s_2} Q_{x_2}^{(1)} P_{s_2}^* + S_{s_2}^{-1} S_{s_2}^{-1}]^{-1} P_{s_2} = Q_{x_2}^{(1)-1} - Q_{x_2}^{(1)-1} V_2^T [V_2^T Q_{x_2}^{(1)} V_2^T + S_{s_2}^{-1}]^{-1} V_2^{-1} Q_{x_2}^{(1)-1}$$

Met  $Q_{x_2}^{(1)} = \alpha^2 I$  volgt dan dat

$$(36) \quad \lambda_{i,x_2}^B = \frac{1}{\alpha^2} \nabla_i x_2^{(1)*} (I - V_2^T [V_2^T V_2^T + S_{s_2}^{-1}]^{-1} V_2^{-1}) \nabla_i x_2^{(1)} - \lambda_i$$

Met  $\nabla_i x_2^{(1)}$  gegeven als in (24) volgt voor (36):

$$(37) \quad \lambda_{i,x_2}^B = \left( \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2} - 1 \right) \lambda_i$$

ofwel

$$(38) \quad \lambda_{i,x_2}^B = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \lambda_i$$

Hieruit blijkt, dat de waarde van  $\lambda_{i,x_2}^B$ , dank zij de in ons voorbeeld gedane aannamen, zeer eenvoudig te berekenen is.

We kunnen met (38) goed zien dat, hoe kleiner de variantie van de coördinaten in netwerk (1) ( $\alpha^2$ ) is, hoe groter  $\lambda_{i,x_2}^B$  wordt ten gevolge van een mogelijke fout  $\nabla_i x_2^{(1)}$ . Dit klinkt misschien paradoxaal, maar is eenvoudig te begrijpen, indien men opmerkt dat in een zeer precies verondersteld netwerk de fouten „blijven zitten“ en dus volledig doorwerken, waardoor de betrouwbaarheidsmaat  $\lambda_{i,x_2}^B$  groter wordt. Bovendien moet men bij het beoordelen van de kwaliteit van de aansluiting de precisie en betrouwbaarheid gemeenschappelijk bekijken.

Met deze opmerkingen zijn we aan het eind gekomen van ons voorbeeld van de aansluitingsvereffening. In de volgende hoofdstukken zullen wij steeds een speciaal geval van deze aansluiting nader analyseren.

### 3. Kalibratie van een digitizer

Een speciaal geval van de LKK-aansluiting is het uitvoeren van een kalibratie van een digitizer. Bij de kalibratie van een digitizer zijn we geïnteresseerd in lokale onregelmatigheden en/of bepaalde affiene vervormingen van de digitizer.

Een digitizer wordt meestal gekalibreerd met een zgn. réseau, een zeer precies (regelmatig) grid van rechthoeken of vierkanten. We hebben hier in tegenstelling tot de aansluitingsvereffening in het algemeen, te maken met een zeer regelmatig veld van aansluitpunten, waardoor we de formules die we bij de LKK-aansluiting vonden, nog verder kunnen vereenvoudigen.

Is een digitizer eenmaal gekalibreerd, dan kunnen de resultaten die we zullen vinden ook worden toegepast op het onderzoeken van (de eventuele vervorming van) kaarten met de digitizer.

Laten we dus aannemen, dat de punten in het tweede stelsel zijn verdeeld in een patroon van rechthoeken met zijdelengten  $s_u$  en  $s_v$  (fig. 2).

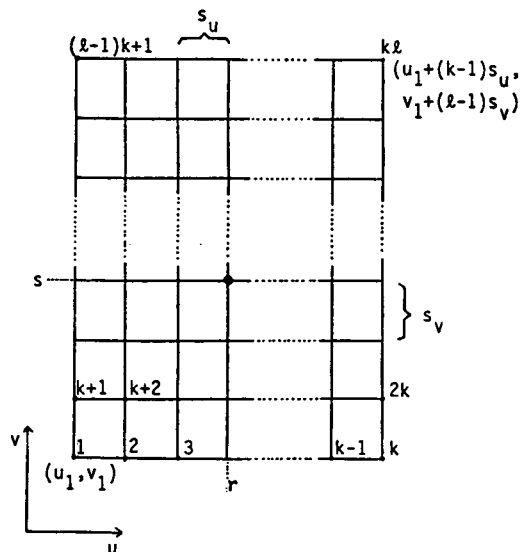


Fig. 2. Rechthoekig patroon van de te digitaliseren punten.

We nemen verder aan, dat we  $n = k\ell$  aansluitpunten hebben, waarvan de nummering is aangegeven in fig. 2. Om de formules, zoals we die in het voorbeeld van de LKK-aansluiting hebben gebruikt, toe te kunnen passen, moet gelden  $\alpha^0 = 0$ , dat wil zeggen het gridpatroon van het réseau moet parallel aan de coördinaatassen van de digitizer worden gelegd. Bovendien zal bij een kalibratie de variantie van de coördinaten van het gridpatroon ( $\beta^2$ ) zeer klein of zelfs te verwaarlozen zijn. Bij de vergelijking met de resultaten van de LKK-aansluiting dient de lezer dit in gedachten te houden. We zullen in dit voorbeeld gebruik maken van de volgende notatie:

$$(39) \quad \begin{aligned} \mathbf{u} &= (u_1, u_1 + s_u, \dots, u_1 + (k-1)s_u)^* \\ \mathbf{u} &= (u_1^*, u_1^*, \dots, u_1^*)^* \\ \mathbf{v} &= (v_1 e_n^*, (v_1 + s_v) e_n^*, \dots, (v_1 + (l-1)s_v) e_n^*)^* \end{aligned}$$

met  $n = k\ell$  wordt

$$(40) \quad \begin{aligned} [u] &= k\ell u_1 + \frac{1}{2}\ell(k^2 - k)s_u \\ [v] &= k\ell v_1 + \frac{1}{2}k(\ell^2 - \ell)s_v \end{aligned}$$

en

$$(41) \quad \begin{aligned} \frac{[u]}{n} &= u_1 + \frac{1}{2}(k-1)s_u \\ \frac{[v]}{n} &= v_1 + \frac{1}{2}(\ell-1)s_v \end{aligned}$$

Gebruikmakend van

$$\begin{aligned} [i] &= \frac{1}{2}n(n+1) \text{ en} \\ [i^2] &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \end{aligned}$$

vinden we

$$(42) \quad \begin{aligned} \bar{u}^* \bar{u} &= \frac{1}{12}s_u^2 k\ell(k^2 - 1) \\ \bar{v}^* \bar{v} &= \frac{1}{12}s_v^2 k\ell(\ell^2 - 1) \\ \bar{u}^* \bar{v} &= 0 \end{aligned}$$

Deze resultaten kunnen we invullen in de formules die we hebben gevonden bij de LKK-aansluiting. We zullen allereerst de variantie van de op te lossen transformatieparameters bekijken. Voor de variantie van de translatieparameters ( $\Delta \bar{t}_x$  en  $\Delta \bar{t}_y$ ) vinden we:

$$(43) \quad \sigma_{\Delta \bar{t}_x}^2 = \sigma_{\Delta \bar{t}_y}^2 = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{k\ell} \cdot \left( 1 + \frac{12(u_1^2 + v_1^2 + (k-1)u_1 s_u + (\ell-1)v_1 s_v + \frac{1}{4}(k-1)^2 s_u^2 + \frac{1}{4}(\ell-1)^2 s_v^2)}{(s_u^2(\ell^2 - 1) + s_v^2(k^2 - 1))} \right)$$

en voor de variantie van de schaal- en rotatieparameter:

$$(44) \quad \sigma_{\Delta \lambda}^2 = \sigma_{\Delta \alpha}^2 = \frac{12(\alpha^2 + \beta^2)}{k\ell(s_u^2(\ell^2 - 1) + s_v^2(k^2 - 1))}$$

Deze formules kunnen nog verder worden vereenvoudigd, indien we een vierkantenpatroon als grid kiezen. In dat geval geldt namelijk  $s_u = s_v$ .

We zien, dat we de precisie van de transformatieparameters kunnen verbeteren door het aantal aansluitpunten ( $k\ell$ ) en de zijdelengten  $s_u$  en  $s_v$  te vergroten. Een dergelijke gevolgtrekking hebben we ook al gemaakt bij het voorbeeld van de LKK-aansluiting.

In het kader van dit voorbeeld bekijken we nu de grenswaarden die we vinden bij de conventionele alternatieve hypothese en de hypothese van de affiene vervorming. Dit zijn twee relevante hypothesen in geval van een kalibratie voor respectievelijk lokale en globale vervormingen van de digitizer.

Bij de conventionele alternatieve hypothese vinden we voor een punt  $i$  met de coördinaten  $r, s$  (fig. 2) met

$$\begin{aligned} i &= (s-1)k + r \\ \bar{u}_i^2 &= s_u^2 \left( r - \frac{1}{2}(k+1) \right)^2 \\ \bar{v}_i^2 &= s_v^2 \left( s - \frac{1}{2}(\ell+1) \right)^2 \\ \bar{u}_i \bar{v}_i &= s_u s_v \left( r - \frac{1}{2}(k+1) \right) \left( s - \frac{1}{2}(\ell+1) \right) \end{aligned}$$

voor de grenswaarde

$$(45) \quad c_i |\nabla_i| = \sqrt{\frac{(\alpha^2 + \beta^2) \lambda_i}{\left( 1 - \frac{1}{k\ell} - \frac{12 \left( s_u^2 \left( r - \frac{1}{2}(k+1) \right)^2 + s_v^2 \left( s - \frac{1}{2}(\ell+1) \right)^2 \right)}{(k\ell)(s_u^2(k^2 - 1) + s_v^2(\ell^2 - 1))} \right)}}$$

De straal van de grenswaardecirkel behorend bij de alternatieve hypothese van een affiene vervorming wordt:

$$(46) \quad |\nabla_i|_Y = \sqrt{\frac{(\alpha^2 + \beta^2) \lambda_i (s_u^2(k^2 - 1) + s_v^2(\ell^2 - 1))}{4(k\ell)s_u^2s_v^2(k^2 - 1)(\ell^2 - 1)}}$$

De gevonden resultaten (43), (44), (45), (46) lijken op het eerste gezicht misschien niet eenvoudiger dan die bij de LKK-aansluiting. In tegenstelling tot de LKK-aansluiting hebben we hier echter niet de hele coördinaatvectoren  $\bar{u}$  en  $\bar{v}$  nodig, maar slechts de parameters  $k$ ,  $\ell$ ,  $s$  en  $s_v$ . Men kan dus, bijvoorbeeld voor het maken van een kalibratie-opzet, de te verwachten resultaten analyseren met gebruikmaking van slechts een paar parameters.

#### Literatuur

1. Teunissen, P. J. G., M. A. Salzmann, H. M. de Heus, *Over het aansluiten van puntenvelden (1) — Het rangdefecte lineaire*

*tweede standaardvraagstuk*. NGT Geodesia 1987, no. 5, p. 181-188.

2. Teunissen, P. J. G., M. A. Salzmann, H. M. de Heus, *Over het aansluiten van puntenvelden (2) — De aansluitingsvereffening*. NGT Geodesia 1987, no. 6, p. 229-235; no. 7/8, p. 270-273.
3. Teunissen, P. J. G., M. A. Salzmann, H. M. de Heus, *Over het aansluiten van puntenvelden (3) — Kwaliteitsaspecten van de aansluiting*. NGT Geodesia 1987, no. 9, p. 329-335; no. 10, p. 397-400.
4. Van Voorden, A., *Toetsing en betrouwbaarheid bij analytisch absoluut oriënteren*. NGT Geodesia 1987, no. 1, p. 16-20.
5. Velsink, H., *Kwaliteitsbeheer van kaarten bij het Kadaster*. NGT Geodesia 1987, no. 4, p. 130-135.
6. Molen, A. M., *Een kwaliteitsvergelijking tussen de minuut- en GBKN-kaart van Barneveld*. NGT Geodesia 1987, no. 6, p. 235-238.
7. Teunissen, P. J. G., *Adjusting and testing with the models of the affine and similarity transformation*. Manuscripta Geodetica 11, p. 214-225, 1986.

# Over het aansluiten van puntenvelden (4): Toepassingen en voorbeelden (vervolg)<sup>1)</sup>

door dr. ir. P. J. G. Teunissen, ir. M. A. Salzmann en ir. H. M. de Heus, Faculteit der Geodesie van de Technische Universiteit Delft.

## 4. Analytisch absoluut oriënteren

Behalve in het tweedimensionale geval kan de LKK-aansluitingsvereffening vanzelfsprekend ook in een driedimensionale ruimte worden uitgevoerd. Ook hier zijn talrijke toepassingen te vinden. We noemen de aansluiting van driedimensionale netwerken (bijvoorbeeld GPS), de digitale terreinmodellen en de fotogrammetrie. In dit artikel hebben we een voorbeeld uit de fotogrammetrie gekozen.

We zullen laten zien, dat we ook in het driedimensionale geval nog tot analytische oplossingen kunnen komen. We beschouwen het analytisch absoluut oriënteren van een stereomodel. Hierbij hebben we weer te maken met twee netwerken; dat van de modelcoördinaten en het netwerk van de terreinpunten waarop wordt aangesloten. Een uitgewerkt numeriek voorbeeld kan de lezer vinden in [4]<sup>2)</sup>. Ons voorbeeld sluit aan op dit artikel. Het uitgangspunt van [4] is het volgende model:

$$(47) \quad \begin{pmatrix} x_i^T \\ y_i^T \\ z_i^T \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\kappa & : & -\cos\phi\sin\kappa & : \\ \cos\omega\sin\kappa + \sin\omega\sin\phi\cos\kappa & : & \cos\omega\cos\kappa - \sin\omega\sin\phi\sin\kappa & : \\ \sin\omega\sin\kappa - \cos\omega\sin\phi\cos\kappa & : & \sin\omega\cos\kappa + \cos\omega\sin\phi\sin\kappa & : \\ : & \sin\phi & & \\ : & -\sin\omega\cos\phi & & \\ : & \cos\omega\cos\phi & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix}$$

met  $x_i^T, y_i^T, z_i^T$  terreincoördinaten en  
 $u_i, v_i, w_i$  modelcoördinaten.

<sup>1)</sup> Slot van de miniserie over het aansluiten van puntenvelden. Een algemene inleiding en de delen 1, 2 en 3 zijn geplaatst in het mei-, juni-, juli/augustus-, september- en oktobernummer van NGT Geodesia. Nu volgt eerst het restant van deel 4 dat werd begonnen in het novembernummer, waarna de auteurs afsluiten met een korte epiloog (p. 515).

<sup>2)</sup> De nummers [3] t.m. [9] verwijzen naar „Literatuur“ op p. 515 aan het eind van dit artikel.

De vector van de transformatieparameters is gegeven als:

$$(48) \quad t = (\lambda, \omega, \phi, \kappa, t_x, t_y, t_z)^*$$

met  $\omega, \phi, \kappa$  de rotaties om respectievelijk de  $u, v$ , en  $w$ -as. Het driedimensionale geval is met algoritme (3) op te lossen. We formuleren dus eerst weer een gereduceerd model, waarin alleen nog transformatieparameters als onbekenden voorkomen. Voordat we dit algoritme toepassen, moeten we eerst nog de aannamen omtrent het mathematische model nader specificeren. We veronderstellen de (benaderde) hoogten van de modelpunten constant. Deze aanname is geldig voor relatief vlak terrein. We gaan derhalve uit van:

$$(49) \quad w = ce_n, \text{ met } c \text{ een constante.}$$

Het kansmodel van de waarnemingen specificeren we in het gereduceerde model; de waarnemingen zijn dan coördinaatverschillen. We doen in deze opzet dus geen uitspraak over de precisie van de coördinaten in de afzonderlijke netwerken.

We veronderstellen, dat de covariantiematrix van deze verschillen ( $Q_d$ ) regulier is en tevens een diagonaalmatrix. Bovendien gaan we ervan uit, dat in het stereomodel de hoogtecoördinaat met een afwijkende precisie wordt gemeten. Dit is in de fotogrammetrie een gebruikelijke aanname; doorgaans worden de hoogten minder precies verondersteld dan de planimetrische coördinaten. Hiermee wordt de covariantiematrix van de coördinaatverschillen:

$$(50) \quad Q_d = \beta^2 \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 I \end{pmatrix}$$

$3n \times 3n$

met  $\beta^2$  in [meter<sup>2</sup>] en  $I$  een  $n \times n$  eenheidsmatrix.

De variantie van de hoogteverschillen is een factor  $\alpha^2$  groter dan die van de planimetrische coördinaatverschillen. Voor het gereduceerde model vinden we tenslotte de volgende vergelijkingen:

$$(51) \quad E\{d\} = - \begin{pmatrix} u & 0 & ce_n & -v & e_n & 0 & 0 \\ v & -ce_n & 0 & u & 0 & e_n & 0 \\ ce_n & v & -u & 0 & 0 & 0 & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\lambda \\ \Delta\omega \\ \Delta\phi \\ \Delta\kappa \\ \Delta t_x \\ \Delta t_y \\ \Delta t_z \end{pmatrix}$$

Uitgaande van (51) kunnen de normaalvergelijkingen worden opgesteld. De normaalmatrix is analytisch te inverteren. De inversie van deze (7 x 7)-matrix valt buiten het bestek van dit voorbeeld. In dit voorbeeld zullen we ons beperken tot de grenswaarden behorend bij de conventionele alternatieve hypothese en een bijzondere alternatieve hypothese.

Indien we een fout in een planimetrische (u- of v-) coördinaat veronderstellen, vinden we als grenswaarde:

$$(52) \quad c_i |\nabla_i| = c_i \sqrt{\frac{\beta^2 \lambda_i}{1 - \frac{1}{n} - \frac{\bar{u}_i^2 + \bar{v}_i^2}{\bar{u}^* \bar{u} + \bar{v}^* \bar{v}}}}$$

Deze grenswaarde is door aanname (49) identiek aan de grenswaarde in het tweedimensionale geval.

Veronderstellen we een mogelijke fout in een hoogte (w-coördinaat), dan wordt de grenswaarde:

$$(53) \quad c_i |\nabla_i| = c_i \sqrt{\frac{\beta^2 \lambda_i}{\alpha^2 \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{\bar{u}^* \bar{u} \bar{v}_i^2 - 2\bar{u}_i \bar{v}_i \bar{u}^* \bar{v} + \bar{v}^* \bar{v} \bar{u}_i^2}{\bar{u}^* \bar{u} \bar{v} - (\bar{u}^* \bar{v})^2}\right)}}$$

In deze grenswaarde is de vorm die we in het voorbeeld van de LKK-aansluiting geometrisch hebben geanalyseerd, te herkennen. De grenswaarde is ook te schrijven als:

$$(53') \quad c_i |\nabla_i| = c_i \sqrt{\frac{\beta^2 \lambda_i (\bar{u}^* \bar{u} \bar{v} - (\bar{u}^* \bar{v})^2)}{\alpha^2 ((n-1)(\bar{u}^* \bar{u} \bar{v} - (\bar{u}^* \bar{v})^2) - (\bar{u}^* \bar{u} \bar{v}_i^2 - 2\bar{u}_i \bar{v}_i \bar{u}^* \bar{v} + \bar{v}^* \bar{v} \bar{u}_i^2)}}$$

We kunnen de gevonden resultaten (52) en (53) vergelijken met de numerieke waarden die Van Voorden heeft berekend in [4] voor de grenswaarden in een stereo-model.

We hebben gebruik gemaakt van fig. 1 en de gegevens in hoofdstuk 5 van [4]. Met de in [4] gegeven precisie van de modelcoördinaten en de fotoschaal vinden we  $\sigma_u = \sigma_v = 0,024$  [m] en daarmee  $\beta^2 = 0,000576$  [m<sup>2</sup>]. Met  $\sigma_w = 0,06\%$  van de vlieghoogte vinden we  $\sigma_w = 0,0756$  [m] en tenslotte  $\alpha^2 = (0,024/0,0756)^2 = 0,1$ .

De (benaderde) coördinaten van de aansluitpunten hebben we verkregen door uit te gaan van het gebruikelijke fotoformaat (23 cm x 23 cm) en de fotoschaal, en te veronderstellen — zoals blijkt uit [4], fig. 1 — dat de aansluitpunten regelmatig verdeeld aan de rand van het model liggen.

In tabel 1 vergelijken we de resultaten van [4] met die van de formules (52) en (53), waarin we de door ons afgeleide parameters en benaderde waarden hebben ingevuld.

Grenswaarde in [meter]	u	v	w
[4]	0,14	0,14	0,52
(52) en (53)	0,13	0,13	0,48

Tabel 1. Vergelijking grenswaarden modelcoördinaten.

We zien, dat we goede benaderingen krijgen voor onze kwaliteitsparameters, ondanks het feit dat we de benaderde hoogten van het model constant veronderstellen. In [4] wordt een hoogte-instellingsfout als bijzondere alternatieve hypothese behandeld. Omdat het hier een alternatieve hypothese betreft, die betrekking heeft op meerdere coördinaten, vinden we een minder eenvoudige vorm voor de grenswaarde. De grenswaarde die we voor deze alternatieve hypothese vinden, is echter nog steeds van een eenvoudige analytische vorm. De analytische vorm van deze grenswaarde en de analyse ervan komen in dit voorbeeld niet aan de orde. Deze grenswaarde heeft namelijk niet direct betrekking op de driedimensionale aansluitingsvereffening in het algemeen, maar behoort bij een specifieke fotogrammetrische alternatieve hypothese.

We hopen met dit voorbeeld te hebben gedemonstreerd, dat het ook in het driedimensionale geval mogelijk is met onze analytische benaderingswijze de kwaliteit volgend uit de aansluitingsvereffening op realistische wijze te onderzoeken.

## 5. Vrije opstelling

Bij bepaalde (landmeetkundige) meetmethoden hebben we direct te maken met de aansluitingsproblematiek. Dat zijn bijvoorbeeld die methoden waar men, uitgaande van in coördinaten bekende punten, door metingen naar die punten de coördinaten van zijn opstelpunt wil bepalen.

In dit kader richten we onze aandacht op de meetmethode van de *vrije opstelling*. We beperken ons tot het gebruik van de vrije opstelling als „bijhoudingsmeting”. Men meet hierbij vanuit een in coördinaten onbekend opstelpunt naar in coördinaten bekende aansluitpunten en detailpunten. De vrije opstelling als meetmethode voor de bepaling van de grondslag voor detailmetingen komt hier niet ter sprake.

Het verband van de vrije opstelling met de aansluitingsvereffening is eenvoudig te leggen. Naast het netwerk van de aansluitpunten kan men ook, uitgaande van zijn opstelpunt als oorsprong en de nul-richting van de rand als oriëntering, coördinaten in het „tachymeter-stelsel” bepalen. Met behulp van de LKK-aansluiting zijn beide netwerken dan op elkaar aan te sluiten.

Deze methode is echter nogal omslachtig. Men kan namelijk, uitgaande van de waarnemingen (richtingen en afstanden) en de coördinaten van de aansluitpunten direct een LKK-(aansluitings)vereffening uitvoeren. Het functiemodel van de vrije opstelling luidt:

$$(54) \quad \begin{pmatrix} \ell \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}, \quad Q_y = \begin{pmatrix} Q_z & 0 \\ 0 & Q_{x_2}^{(1)} \end{pmatrix}$$

met

$$t = (\Delta t_x, \Delta t_y, \Delta\lambda, \Delta\alpha)^*$$

$\ell$  het verschil van richtings- en afstandswaarnemingen en benaderde waarnemingen.





$$(61) \quad y = A_1 t, \quad Q_y = (Q_{\ell} + A_2 Q_{\tilde{x}_2}^{(1)} A_2^*) .$$

Omdat, zie (56), (58) en (59)

$$(62) \quad Q_{\ell} + A_2 Q_{\tilde{x}_2}^{(1)} A_2^* = (\alpha^2 + \beta^2) \begin{pmatrix} 1/s_{s1}^2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1/s_{sn}^2 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

een diagonaalmatrix is, kan op eenvoudige wijze de normaalmatrix van het stelsel normaalvergelijkingen volgens uit (61) worden berekend:

$$(63) \quad A_1^* (Q_{\ell} + A_2 Q_{\tilde{x}_2}^{(1)} A_2^*)^{-1} A_1 = \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2)} \begin{pmatrix} n & 0 & -[u] & -[v] \\ 0 & n & -[v] & [u] \\ -[u] & -[v] & u^* u + v^* v & 0 \\ -[v] & [u] & 0 & u^* u + v^* v \end{pmatrix}$$

Vergelijk deze vorm met de normaalmatrix die we bij de LKK-aansluitingsvereffening vonden. De analogie van beide voorbeelden is nu duidelijk zichtbaar. Bedenk echter, dat de vectoren u en v in dit geval vectoren van coördinaatverschillen zijn.

We vinden als inverse van de normaalmatrix:

$$(64) \quad (A_1^* Q_y^{-1} A_1)^{-1} = Q_{\tilde{t}} = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{n(\bar{u}^* \bar{u} + \bar{v}^* \bar{v})} \begin{pmatrix} \boxed{u^* u + v^* v} & 0 & [u] & [v] \\ 0 & \boxed{u^* u + v^* v} & [v] & -[u] \\ [u] & [v] & n & 0 \\ [v] & -[u] & 0 & n \end{pmatrix}$$

Het omrande deel in (64) beschrijft de precisie van de translatieparameters  $\Delta \tilde{t}_x$  en  $\Delta \tilde{t}_y$ . Bij de vrije opstelling is dit echter niets anders dan de precisie van het opstelpunt.

We kunnen de variantie van een coördinaat van een opstelpunt ook beschrijven (indien we de factor  $(\alpha^2 + \beta^2)$  even buiten beschouwing laten) als:

$$(65) \quad \frac{u^* u + v^* v}{n(\bar{u}^* \bar{u} + \bar{v}^* \bar{v})} = \frac{1}{n} + \frac{[u]^2 + [v]^2}{n^2(\bar{u}^* \bar{u} + \bar{v}^* \bar{v})} .$$

Door het aantal aansluitpunten (n) te vergroten en de aansluitpunten zo regelmatig mogelijk rond de horizon van het opstelpunt te verdelen, waarmee we het opstelpunt bij benadering in het zwaartepunt van de aansluitpunten kiezen, wordt de variantie van de coördinaten van het opstelpunt geminimaliseerd. De termen [u] en [v] worden klein en de term  $\bar{u}^* \bar{u} + \bar{v}^* \bar{v}$  wordt groot.

Bij de vrije opstelling is men natuurlijk ook geïnteresseerd in de precisie van de vanuit het opstelpunt aangemeten detailpunten. Uitgaande van de correctievergelijkingen voor richtingen en afstanden naar een detailpunt en het kansmodel van deze metingen, zie (58), komen we tenslotte tot de volgende (co)varianties van detailpuntcoördinaten:

$$(66) \quad \begin{cases} \overline{x_d \cdot x_d} = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{n(\bar{u}^* \bar{u} + \bar{v}^* \bar{v})} (u^* u + v^* v + n u_{sd}^2 + n v_{sd}^2 + 2[u] u_{sd} - 2[v] v_{sd}) + \beta^2 \\ \overline{y_d \cdot y_d} = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{n(\bar{u}^* \bar{u} + \bar{v}^* \bar{v})} (u^* u + v^* v + n u_{sd}^2 + n v_{sd}^2 - 2[u] u_{sd} + 2[v] v_{sd}) + \beta^2 \\ \overline{x_d \cdot y_d} = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{n(\bar{u}^* \bar{u} + \bar{v}^* \bar{v})} (2[u] v_{sd} + 2[v] u_{sd}) \end{cases}$$

met

$$u_{sd} = \begin{pmatrix} x_d^{(1)} \\ -x_s^{(1)} \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad v_{sd} = \begin{pmatrix} y_d^{(1)} \\ -y_s^{(1)} \end{pmatrix}$$

$x_d^{(1)}, y_d^{(1)}$  de benaderde coördinaten van het detailpunt in stelsel (1).

Indien geldt  $[u] = [v] = 0$  (dat wil zeggen het opstelpunt wordt in het zwaartepunt van de aansluitpunten gekozen), dan volgt uit (66) dat de coördinaten van een detailpunt ongecorrigeerd zijn. Voor de variantie van een detailpuntcoördinaat vinden we dan:

$$(67) \quad \overline{x_d \cdot x_d} = \overline{y_d \cdot y_d} = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{n(\bar{u}^* \bar{u} + \bar{v}^* \bar{v})} (u_d^* u_d + v_d^* v_d) + \beta^2$$

met

$$u_d = (x_{2_1}^{(1)}, -x_d^{(1)}, \dots, x_{2_n}^{(1)}, -x_d^{(1)}) ,$$

$$v_d = (y_{2_1}^{(1)}, -y_d^{(1)}, \dots, y_{2_n}^{(1)}, -y_d^{(1)})$$

Uit (67) blijkt dat de precisie van de coördinaten van een detailpunt, in het geval  $[u] = [v] = 0$ , slechts afhankelijk is van de ligging van het detailpunt ten opzichte van de aansluitpunten. Dit toch wel verrassende resultaat is te verklaren door onze keuze van het kansmodel. De precisie van de detailpuntcoördinaten is minimaal, indien het detailpunt in het zwaartepunt van de aansluitpunten ligt. Voor een bewijs van (67) zie [8].

Bij de vrije opstelling gebruiken we richtingen en afstanden. Voor beide typen waarnemingen vinden we verschillende grenswaarden, behorend bij de conventionele alternatieve hypothese (dat wil zeggen een mogelijke fout in een richting of afstand).

Voor de berekening van de toetsgrootheden en grenswaarden maken we gebruik van [3] - (33). Merk overigens op, dat we bij de toetsing geen onderscheid kunnen maken tussen een fout in een waarneming of een mogelijke fout in een coördinaat van een aansluitpunt in een bepaalde richting. We kunnen dus bij de vrije opstelling bepaalde fouten in (de coördinaten van) de aansluitpunten en de waarnemingen (richtingen en afstanden) niet scheiden. Dit is een nadeel van de meetmethode van de vrije opstelling. We veronderstellen hier een mogelijke fout in een waarneming. Voor een fout in een waarneming naar een aansluitpunt j vinden we met:

$$(68) \quad c_j^* Q_y^{-1} Q_{\epsilon} Q_y^{-1} c_j = c_j^* (Q_y^{-1} - Q_y^{-1} A_1 Q_{\tilde{t}} A_1^* Q_y^{-1}) c_j$$

in geval van een afstand:

$$(69) \quad c_j^* Q_y^{-1} Q_{\epsilon} Q_y^{-1} c_j = \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2)} \left( 1 - \frac{\bar{u}^* \bar{u} + \bar{v}^* \bar{v} + n(\bar{u}_j^2 + \bar{v}_j^2)}{n(\bar{u}^* \bar{u} + \bar{v}^* \bar{v})} \right)$$

ofwel

$$(69') \quad c_j^* Q_y^{-1} Q_{\epsilon} Q_y^{-1} c_j = \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2)} \left( 1 - \frac{1}{n} - \frac{\bar{u}_j^2 + \bar{v}_j^2}{\bar{u}^* \bar{u} + \bar{v}^* \bar{v}} \right)$$

Voor een richting vinden we:

$$(70) \quad c_j^* Q_y^{-1} Q_\epsilon Q_y^{-1} c_j = \frac{u_j^2 + v_j^2}{(\alpha^2 + \beta^2)} \left( 1 - \frac{1}{n} - \frac{\bar{u}_j^2 + \bar{v}_j^2}{\bar{u}^* \bar{u} + \bar{v}^* \bar{v}} \right)$$

Let op de opmerkelijke overeenkomst van deze termen met de resultaten die we vonden bij de tweedimensionale LKK-aansluitingsvereffening.

De toetsgrootte en inwendige betrouwbaarheid zijn in geval van een mogelijke fout in een afstand:

$$(71) \quad T_1 = \frac{\epsilon_s^2}{s_j} \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2) \left( 1 - \frac{1}{n} - \frac{\bar{u}_j^2 + \bar{v}_j^2}{\bar{u}^* \bar{u} + \bar{v}^* \bar{v}} \right)}$$

en

$$(72) \quad c_i |\nabla_i| = c_i \sqrt{\frac{(\alpha^2 + \beta^2) \lambda_i}{\left( 1 - \frac{1}{n} - \frac{\bar{u}_j^2 + \bar{v}_j^2}{\bar{u}^* \bar{u} + \bar{v}^* \bar{v}} \right)}}$$

Voor de toetsgrootte en de grenswaarde van een richting vindt men overeenkomstige termen als in (71) en (72), met dien verstande dat men, zie (70), de noemer met de term  $u_j^2 + v_j^2$  moet voorvermenigvuldigen.

We zien dat, net als bij de precisie — zie bijvoorbeeld de opmerkingen naar aanleiding van (64) — de inwendige betrouwbaarheid afhankelijk is van het aantal aansluitpunten. De inwendige betrouwbaarheid wordt verbeterd, indien we het aantal aansluitpunten vergroten en de aansluitpunten regelmatig over de horizon van het opstelpunt verdelen (daardoor wordt namelijk de term  $\bar{u}^* \bar{u} + \bar{v}^* \bar{v}$  groter). We zullen aan de hand van (72) illustreren hoe gemakkelijk men met behulp van onze analytische opzet inzicht krijgt in de kwaliteitsparameters bij de vrije opstelling.

Stel dat alle aansluitpunten zijn verdeeld op een cirkel met het opstelpunt als middelpunt. In het voorgaande hebben we al aangegeven, dat dit een gunstige opzet is. Er geldt dan (de lezer kan dit eenvoudig nagaan):

$$\frac{\bar{u}_j^2 + \bar{v}_j^2}{\bar{u}^* \bar{u} + \bar{v}^* \bar{v}} = \frac{1}{n}$$

zodat we voor de grenswaarde van een afstand, zie (72), vinden

$$(73) \quad c_i |\nabla_i| = c_i \sqrt{\frac{(\alpha^2 + \beta^2) \lambda_i}{\left( 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right)}} = c_i \sqrt{\frac{(\alpha^2 + \beta^2) \lambda_i}{n - 2}}$$

Merk op dat bij de vrije opstelling de betrouwbaarheid van de waarnemingen naar de detailpunten oneindig slecht is.

Naar analogie van de aansluitingsvereffening kunnen we ook bij de vrije opstelling drie klassen van mogelijke alternatieve hypothesen formuleren, zie [3].

Voor wat betreft  $H_A$  — een mogelijke modelfout in  $E\{\hat{x}^{(1)}\}$  ten gevolge van een onontdekte fout in netwerk (1) — kunnen we de redenering bij de  $H_A$  van de aansluitingsvereffening handhaven. Bij de vrije opstelling is de betrouwbaarheid ten gevolge van een onontdekte fout in het netwerk zelf ( $H_C$ ) echter oneindig slecht. De vrije opstelling is als „vrij net“ volledig ongecontroleerd. We beperken ons in dit voorbeeld derhalve tot  $H_B$ .

Bij de vrije opstelling voeren we een strenge LKK-aansluitingsvereffening uit. Dit betekent, zie (54), dat ook de coördinaten van de aansluitpunten een correctie krijgen. Deze correctie wordt echter in ons gereduceerde model (61) niet berekend en in de praktijk ook niet aangebracht. We passen hier dus een alternatieve methode van aansluiten toe. Net als bij de pseudo LKK-aansluiting krijgen de coördinaten van de aansluitpunten geen correctie.

De coördinaatberekening van het opstelpunt wijkt echter af van de pseudo LKK-aansluiting. We passen namelijk de coördinaatberekening van de LKK-aansluiting toe. De beschrijving van de relatieve precisie tussen (de coördinaten van) het opstelpunt en de aansluitpunten is daarom niet gelijk aan die van de LKK- en pseudo LKK-aansluiting. De precisie (van de coördinaten) van het opstelpunt (64) en de detailpunten (66) is met deze oplossingsmethode wel exact beschreven.

De uitwendige betrouwbaarheidsbeschrijving heeft dan ook geen betrekking op de coördinaten van de aansluitpunten; mogelijke fouten in waarnemingen werken immers in ons geval niet op de coördinaten van de aansluitpunten door. Bovendien zijn we voornamelijk geïnteresseerd in de invloed van mogelijke fouten op de coördinaten van het opstelpunt. We dienen dus nog, zie ons model (61), de invloed op de schaal- en rotatieparameter te elimineren. Daartoe gebruiken we de in [3]-(63) afgeleide formule

$$(74) \quad \lambda_{i,y}, \lambda_{i,x} = \lambda_{i,y} - \nabla_i y^* Q_y^{-1} A_2 (A_2^* Q_y^{-1} A_2)^{-1} A_2^* Q_y^{-1} \nabla_i y$$

In ons geval vinden we voor zowel richtingen als afstanden:

$$(75) \quad \lambda_{i,y} = \frac{(\alpha^2 + \beta^2) \lambda_i}{\left( 1 - \frac{1}{n} - \frac{\bar{u}_j^2 + \bar{v}_j^2}{\bar{u}^* \bar{u} + \bar{v}^* \bar{v}} \right)}$$

De matrix  $A_2$  in (74) is dat deel van de designmatrix, dat betrekking heeft op de schaal- en rotatieparameters.

$$(76) \quad A_2 = \begin{matrix} 2n \times 2 \\ \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ s_{si} & 0 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Met  $\nabla_i y$  gegeven als (72), vinden we voor de uitwendige betrouwbaarheid van zowel richtingen als afstanden:

$$(77) \quad \lambda_{i,\lambda_s}^B = \left( 1 - \frac{u_j^2 + v_j^2}{\bar{u}^* \bar{u} + \bar{v}^* \bar{v}} \right) \frac{n(\bar{u}^* \bar{u} + \bar{v}^* \bar{v})}{(n-1)(\bar{u}^* \bar{u} + \bar{v}^* \bar{v}) - n(\bar{u}_j^2 + \bar{v}_j^2)} - 1 \lambda_i$$

## 6. Samenvatting en conclusies

We hebben in dit artikel een aantal voorbeelden en toepassingen van de LKK-aansluiting behandeld. Met enige vereenvoudigde aannamen zijn we in staat analytische vormen voor de precisie- en betrouwbaarheidsbeschrijving van de aansluitingsvereffening en de oplossingen van de transformatieparameters te geven. Hierdoor zijn we in staat algemeen geldende uitspraken over de kwaliteit van de door ons behandelde aansluitproblemen te doen.

Met de gevonden resultaten kan de lezer voor zijn eigen specifieke situatie nu zelf de te verwachten kwaliteit volgend uit een aansluitingsvereffening analyseren.

## Literatuur

3. Teunissen, P. J. G., M. A. Salzmänn, H. M. de Heus, *Over het aansluiten van puntenvelden (3) — Kwaliteitsaspecten van de aansluiting*. NGT Geodesia 1987, no. 9, p. 329-335; no. 10, p. 397-400.
4. Van Voorden, A., *Toetsing en betrouwbaarheid bij analytisch absoluut oriënteren*. NGT Geodesia 1987, no. 1, p. 16-20.
8. Ruopp, M., *Genauigkeitsbetrachtungen zur polaren Punktbestimmung mit elektronischen Tachymetern bei freier Standpunktwahl*. Allgemeine Vermessungs-Nachrichten, 1971/8.
9. Salzmänn, M. A., *Over precisie en betrouwbaarheid van detailmetingen*. Afstudeerscriptie Afdeling der Geodesie, Delft 1986.

# Over het aansluiten van puntenvelden: Epiloog

door dr. ir. P. J. G. Teunissen, ir. M. A. Salzmänn en ir. H. M. de Heus, Faculteit der Geodesie van de Technische Universiteit Delft.

## SUMMARY

### On the connection of pointfields — epilogue

At the end of the mini series about the connection of pointfields, the authors emphasize that the approach presented in the previous articles is only a guideline for practical problems: before application, one should always carefully consider the existing model relations and the choice of applicable covariance matrices.

To conclude, possible extensions to the theory presented are indicated, both in the field of the connection method itself, statistical testing and precision and reliability.

Onder de titel „Over het aansluiten van puntenvelden” zijn de schrijvers in een viertal artikelen ingegaan op het algemene vraagstuk van de aansluiting van puntenvelden. In algemene zin hebben we onder de *aansluitingsproblematiek* verstaan de koppeling van coördinatenbestanden, zodanig dat op een zinvolle en verantwoorde manier de uitwisseling en combinatie van informatie uit verschillende geografische informatiesystemen mogelijk wordt gemaakt.

In de bovengenoemde vier artikelen hebben we een methode van aansluiting gepresenteerd, waarbij achtereenvolgens aan de orde zijn gekomen: *de aansluitingsvereffening zelf* — hierbij worden, uitgaande van gedane modelaannamen, de verschillende coördinatenbestanden gekoppeld tot een geïntegreerd consistent coördinatenbestand, *de toetsing* — hierbij worden de modelaannamen gecontroleerd, zodat van een verantwoorde kwaliteitsbeheersing sprake kan zijn, en *de kwaliteitsbeschrijving* met behulp van precisie en betrouwbaarheidsparameters.

De gepresenteerde aansluitmethode kan als uitgangspunt worden genomen voor specifieke in de praktijk voorkomende aansluitproblemen. Dit wil evenwel nog niet zeggen, dat met deze serie artikelen alle praktische vraagpunten rond het aansluitingsprobleem zijn opgelost. Zo moet voor iedere individuele toepassing bijvoorbeeld altijd eerst de zgn. nulhypothese worden geformuleerd, met de volgende overwegingen:

- Welke *modelrelaties* gelden tussen de verwachtingen van de coördinaten van beide bestanden? In geval van eenzelfde coördinaatdefinitie voor beide sets coördinaten (bijvoorbeeld dezelfde set gewogen minimumcondities) mogen we verwachten dat de coördinaatgrootheden gelijk zijn; meestal zal de coördinaatdefinitie evenwel verschillend zijn en zijn de coördinaten gelijk, afgezien van een gelijkvormigheidstransformatie. Wellicht zijn er ook nog vervormingen in één van beide puntenvelden, welke in het model in rekening moeten worden gebracht (zoals een affiene vervorming).
- Welke *covariantiematrices* moeten worden aangenomen voor de precisiebeschrijving van de coördinaten

van elk der puntenvelden? Eenvoudige aannamen hieromtrent (bijvoorbeeld diagonaalmatrices) leiden tot een eenvoudiger verwerkingsproces, waarbij vaak zelfs analytische oplossingen mogelijk worden, zoals uit de voorbeelden in deel 4 blijkt. Daartegenover staat dat, als de werkelijkheid hierdoor te veel geweld wordt aangedaan, de vereenvoudiging van het kansmodel zich wreekt in een slechtere kwaliteit van het eindprodukt, als tenminste de consequenties van de toetsuitkomsten serieus worden beschouwd.

Uit bovenstaande blijkt dat, voordat men de aansluiting daadwerkelijk kan uitvoeren, altijd een aantal keuzes moet worden gedaan. Voor het doen van weloverwogen keuzes is kennis omtrent de bestandshistorie onontbeerlijk. Met de keuzes zal moeten worden getracht het optimum te vinden tussen voldoende kwaliteit enerzijds en eenvoud van het verwerkingsproces (dus kosten) anderzijds.

Afhankelijk van de toepassing kunnen ook aanvullingen op verschillende aspecten van de gepresenteerde aansluitingsmethode nodig zijn. Een aantal voorlopige richtingen voor uitbouw van de gepresenteerde aansluitingsmethode kan al worden gegeven:

- *Aansluiting*: mogelijkheden om door de puntsaansluiting verkregen discontinuïteiten in harde topografische entiteiten te ondervangen.
- *Toetsing*: verbreding van bestaande toetsprocedures, opdat niet alleen op modelfouten in het functionele model, maar ook op de overige modelaannamen scherper kan worden gecontroleerd, bijvoorbeeld door integratie met methoden van variantiecomponenten schatting.
- *Precisie*: introductie van meer gedifferentieerde vervangingsmatrices met een eenvoudige en realistische schattingsmethode voor de parameters die de precisie beschrijven en de mogelijkheid van een variabele afstemming op de behoefte van de praktijk.
- *Betrouwbaarheid*: niet alleen een formele beschrijving gebaseerd op grenswaarden, maar ook een schatting van de grootte van mogelijk nog aanwezige fouten op grond van de toetsuitkomsten.