

# Over het aansluiten van puntenvelden (3): Kwaliteitsaspecten van de aansluiting<sup>1)</sup>

door dr. ir. P. J. G. Teunissen, ir. M. A. Salzmann en ir. H. M. de Heus, Faculteit der Geodesie van de Technische Universiteit Delft.

## SUMMARY

### Quality aspects of connected pointfields

In this article we discuss the quality of least-squares connected pointfields. Precision and reliability parameters are used as quality measures. The quality of exact least-squares connected pointfields as well as the quality of pseudo least-squares connected pointfields is described. The paper also contains a review of the necessary theory of statistical hypothesis testing.

## 1. Inleiding

In het eerste artikel van deze reeks [1]<sup>2)</sup> is het model van het rangdefecte lineaire tweede standaardvraagstuk behandeld. Hierin hebben we laten zien, dat het rangdefect van de designmatrix kan worden opgeheven door het introduceren van zgn. gewogen minimumcondities. Deze condities leggen de coördinaatdefinitie vast.

Uitgaande van de in [1] behandelde theorie zijn in het tweede artikel [2] twee oplossingsmethoden beschreven voor het onderling aansluiten van twee (of meer) coördinaatbestanden. Hierbij mogen de aan te sluiten sets coördinaten ieder een eigen willekeurige coördinaatdefinitie hebben. Omdat in de oplossingsmethoden ook rekening is gehouden met een eventueel rangverlies in de covariantiematrices, is de in [2] beschreven opzet toepasbaar op ieder willekeurig aansluitprobleem.

In het voorliggende artikel wordt ingegaan op de kwaliteitsaspecten van deze aansluiting. Na in hoofdstuk 2 enkele basisbegrippen te hebben behandeld, wordt in hoofdstuk 3 ingegaan op de berekening van (willekeurige functies van) een gedeelte der onbekenden in een algemene vereffening. Immers, niet alle onbekenden in de vereffening hoeven voor het eindprodukt van belang te zijn; men is bijvoorbeeld alleen geïnteresseerd in de

coördinaten, of slechts in een deel der coördinaten. De precisie- en betrouwbaarheidsbeschouwingen dienen dan ook op dat gedeelte der onbekenden betrekking te hebben.

In de hoofdstukken 4, 5 en 6 wordt vervolgens een résumé gegeven van de algemene theorie betreffende respectievelijk de precisie, de toetsing en de betrouwbaarheid. In hoofdstuk 7 worden de toetsingsformules voor de aansluiting afgeleid. Een nadere uitwerking voor de betrouwbaarheid van coördinaten verkregen via de in [2] beschreven aansluitingsmethoden volgt in de hoofdstukken 8 en 9. In hoofdstuk 9 wordt de betrouwbaarheid beschreven van de zgn. pseudo-LKK aansluiting, d.w.z. een LKK-aansluiting met als extra randvoorwaarden, dat de coördinaten van de punten waarop wordt aangesloten, niet wijzigen. In hoofdstuk 10 tenslotte wordt schetsmatig de precisie van de coördinaten beschreven.

## 2. Notatie en enkele begrippen

$$y \sim N(Ax, Q_y),$$

$m \times 1$

betekent, dat de stochastische  $m$ -vector  $y$  normaal verdeeld is met verwachting  $Ax$  en covariantiematrix  $Q_y$ .

$$T_b \sim \chi^2(b, \lambda_i),$$

betekent, dat de stochastische variable  $T_b$  Chi-kwadraat verdeeld is met  $b$  vrijheidsgraden en niet-centraliteitsparameter  $\lambda_i$ .

$$F(b, \infty, \lambda_i) = \chi^2(b, \lambda_i)/b$$

waarbij  $F$  de Fisher verdeling is.

De norm van een vector  $x$  definiëren we als

<sup>1)</sup> Vervolg van de mini-serie over het aansluiten van puntenvelden. Deel 1 en deel 2 zijn geplaatst in het mei-, juni- en juli/augustusnummer van NGT Geodesia.

Deel 3 wordt geplaatst in twee gedeeltes. Hier volgt eerst de theorie van de kwaliteitsbeschrijving. In het oktobernummer volgt de toepassing daarvan op de aansluitingsvereffening.

<sup>2)</sup> De nummers [1] t.m. [8] verwijzen naar „Literatuur“ op p. 334 aan het eind van dit artikel.

$$\|x\|^2 = x^* Q_x^{-1} x.$$

Uit de tekst zal blijken voor welke gewichtsmatrix  $Q_x^{-1}$  is gekozen.

$\hat{=}$  staat voor benaderd.

Indien A een basismatrix is, dan definiëren we de matrix  $P_A$  als

$$P_A = A(A^* Q_y^{-1} A)^{-1} A^* Q_y^{-1}$$

Indien A een rangdefect heeft, dan definiëren we de matrix  $P_A$  als

$$P_A = (AS)[(AS)^* Q_y^{-1} (AS)]^{-1} (AS)^* Q_y^{-1}$$

waarbij AS een basismatrix is van R(A).

Matrix  $P_A$  is idempotent, d.w.z.  $P_A P_A = P_A$ , en kan geometrisch worden geïnterpreteerd als een projectiematrix; zie fig. 1 en [3].

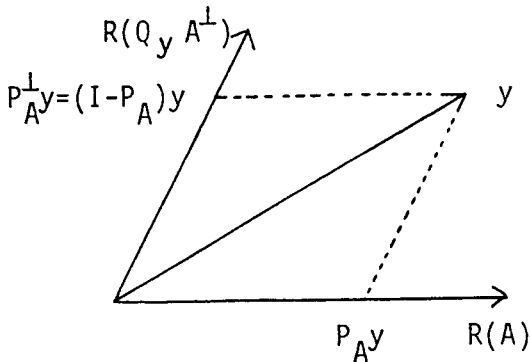


Fig. 1. De idempotente matrix  $P_A$  als projector.

### 3. Functies van een deel der onbekenden

In [1] hebben we laten zien, dat bij een LKK-vereffening onder de nulhypothese

$$(1) \quad H_0: y \sim N(Ax, Q_y), \text{ rang } A = r_A$$

het volgende geldt:

(i) Een lineaire functie  $\Theta = a^*x$  is zuiver schatbaar onder  $H_0$  dan en slechts dan als er een vector  $l \in \mathbb{R}^m$  bestaat, zodanig dat

$$(2) \quad a = A^* l$$

(ii) Indien  $\Theta = a^*x$  zuiver schatbaar is, wordt de MVZL-schatte van  $\Theta$  gegeven door

$$(3) \quad \hat{\theta} = a^* \hat{x},$$

waarbij  $\hat{x}$  een willekeurige oplossing van de normaalvergelijkingen

$$(4) \quad A^* Q_y^{-1} A x = A^* Q_y^{-1} y$$

mag zijn.

(iii) Als  $\hat{x}'$  een willekeurige LKK-schatte van  $x$  onder  $H_0$  is met covariantiematrix  $Q_{\hat{x}'}$ , dan wordt de MVZL-schatte van

$$(5) \quad x_0 = P_s x,$$

$$\text{met } P_s = I - V^1 [S^1 Q_{\hat{x}'} V^1]^{-1} S^1$$

gegeven door

$$(6) \quad \begin{cases} \hat{x} = S[(AS)^* Q_y^{-1} (AS)]^{-1} (AS)^* Q_y^{-1} y = P_s \hat{x}' \\ Q_{\hat{x}} = S[(AS)^* Q_y^{-1} (AS)]^{-1} S^1 = P_s Q_{\hat{x}'} P_s^* \end{cases}$$

Voor functies van een deel der onbekenden  $x$  gelden vergelijkbare resultaten. Ten einde een deel der onbekenden te beschouwen, maken we de volgende opsplitsing:

$$(7) \quad \begin{aligned} x &= (x_1^* \ x_2^*)^*, \quad a = (a_1^* \ a_2^*)^*, \\ A &= (A_1 \ A_2) \quad , \quad V^1 = (V_1^1 \ V_2^1) \end{aligned}$$

Analoog aan (i) – (iii) geldt dan:

(i') Een lineaire functie  $\Theta = a_1^* x_1$  is zuiver schatbaar onder  $H_0$  dan en slechts dan als er een vector  $l \in \mathbb{R}^m$  bestaat, zodanig dat

$$(8) \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^* \\ A_2^* \end{pmatrix} l$$

(ii') Indien  $\Theta = a_1^* x_1$  zuiver schatbaar is, wordt de MVZL-schatte van  $\Theta$  gegeven door

$$(9) \quad \hat{\theta} = a_1^* \hat{x}_1,$$

waarbij  $\hat{x}_1$  een willekeurige oplossing van de gereduceerde normaalvergelijkingen

$$(10) \quad \bar{A}_1^* Q_y^{-1} \bar{A}_1 x_1 = \bar{A}_1^* Q_y^{-1} y,$$

$$\text{met } \bar{A}_1 = (I - P_{A_2}) A_1,$$

mag zijn.

(iii') Als  $\hat{x}'_1$  een willekeurige LKK-schatte van  $x_1$  onder  $H_0$  is met covariantiematrix  $Q_{\hat{x}'_1}$ , dan wordt de MVZL-schatte van

$$(11) \quad x_{01} = P_{s_1} x_1,$$

$$\text{met } P_{s_1} = I - V_1^1 [S_1^1 Q_{\hat{x}'_1} V_1^1]^{-1} S_1^1$$

gegeven door

$$(12) \quad \begin{cases} \hat{x}_1 = S_1 [( \bar{A}_1 S_1 )^* Q_y^{-1} ( \bar{A}_1 S_1 )]^{-1} ( \bar{A}_1 S_1 )^* Q_y^{-1} y \\ \quad = P_{s_1} \hat{x}'_1 \\ Q_{\hat{x}_1} = S_1 [( \bar{A}_1 S_1 )^* Q_y^{-1} ( \bar{A}_1 S_1 )]^{-1} S_1^1 \\ \quad = P_{s_1} Q_{\hat{x}'_1} P_{s_1}^* \end{cases}$$

Hierbij is aangenomen dat  $A_2$  een basismatrix is. Dit geldt voor netwerken altijd zolang (in 2D)  $x_1$  de coördinaten van tenminste twee punten omvat. Het bewijs van (i') – (iii') kan men vinden in [3].

### 4. Résumé precisie

De precisie van de LKK-schatte van de onbekenden  $x$  na een vereffening onder de nulhypothese (1) wordt beschreven door de covariantiematrix  $Q_{\hat{x}}$ . Voor de beoordeling van de precisie is bij puntsbepaling en het aansluiten van netwerken doorgaans alleen de precisie van coördinaten van belang, eventueel zelfs slechts van een gedeelte van de coördinaten. Dit te beoordelen gedeelte van de onbekenden duiden we aan met  $x_1$ ;  $Q_{\hat{x}_1}$  is het corresponderende gedeelte van  $Q_{\hat{x}}$ . Voor de beoordeling van de precisie beschouwen we nu als in hoofdstuk 3 een willekeurige schatbare functie  $\Theta$  van  $x_1$ :

$$(13) \quad \hat{\theta} = a_1^* \hat{x}_1$$

De precisie-eisen aan  $\hat{\theta}$  worden in het algemeen geformuleerd met behulp van een zgn. criteriummatrix  $H_{x_1}$  voor de coördinaten  $x_1$ ; geëist wordt dat

$$(14) \quad \sigma_{\theta}^2 = a_1^* Q_{x_1} a_1 \leq a_1^* H_{x_1} a_1$$

$$\forall \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in R \begin{pmatrix} A_1^* \\ A_2^* \end{pmatrix}$$

$Q_{x_1}$  en  $H_{x_1}$  kunnen hierin ieder een eigen, willekeurige coördinaatdefinitie hebben. Voor  $Q_{x_1}$  is deze afhankelijk van de gekozen set van gewogen minimumcondities [1], terwijl  $H_{x_1}$  zelfs geen betrekking hoeft te hebben op schatbare coördinaten (als  $H_{x_1}$  in een zgn. a-stelsel gegeven is), zolang maar  $a_1^* H_{x_1} a_1$  het gewenste criterium voor  $\hat{\theta}$  levert.

Met de basismatrix

$$V^{\perp} = \begin{pmatrix} v_1^{\perp} \\ v_2^{\perp} \end{pmatrix} \text{ van } N(A_1; A_2)$$

volgt, dat de conditie

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in R \begin{pmatrix} A_1^* \\ A_2^* \end{pmatrix}$$

ook kan worden geschreven als

$$(15) \quad v_1^{\perp*} a_1 = 0 \text{ of } a_1 \in N(v_1^{\perp*})$$

Dus, als  $\bar{V}_1$  een basismatrix is van  $N(v_1^{\perp*})$ , kunnen we (14) ook schrijven als

$$(16) \quad \sigma_{\theta}^2 = \alpha^* \bar{V}_1^* Q_{x_1} \bar{V}_1 \alpha \leq \alpha^* \bar{V}_1^* H_{x_1} \bar{V}_1 \alpha \quad \forall \alpha$$

Aan deze ongelijkheid wordt voor alle  $\alpha$  voldaan, indien alle eigenwaarden  $\mu$  in het algemene eigenwaardeprobleem

$$(17) \quad | \bar{V}_1^* Q_{x_1} \bar{V}_1 - \mu \bar{V}_1^* H_{x_1} \bar{V}_1 | = 0$$

kleiner of gelijk zijn aan 1:  $\mu_{\max} \leq 1$ .

Een praktisch probleem bij het toepassen van (17) is nog de berekening van de basismatrix  $\bar{V}_1$ . Daarom wordt  $\bar{V}_1$  uit het eigenwaardeprobleem geëlimineerd. Met (12) volgt

$$(18) \quad \bar{V}_1^* Q_{x_1} \bar{V}_1 = (\bar{V}_1^* S_1) [(\bar{A}_1 S_1)^* Q_y^{-1} (\bar{A}_1 S_1)]^{-1} (\bar{V}_1^* S_1)^*$$

Vervolgens schrijven we, gebruik makend van

$$\bar{V}_1^* P_{s_1} = \bar{V}_1^* ,$$

$$(I - S_1^{\perp} (S_1^{\perp*} S_1^{\perp})^{-1} S_1^{\perp*}) = S_1 (S_1^* S_1)^{-1} S_1^*$$

$$S_1 (S_1^* S_1)^{-1} S_1^* P_{s_1} = P_{s_1}$$

$$(19) \quad \bar{V}_1^* H_{x_1} \bar{V}_1 = (\bar{V}_1^* S_1) (S_1^* S_1)^{-1} S_1^* P_{s_1} H_{x_1} P_{s_1}^* S_1 (S_1^* S_1)^{-1} (\bar{V}_1^* S_1)^*$$

Met (18) en (19) herleiden we het eigenwaardeprobleem (17) tot

$$| (\bar{V}_1^* S_1) [(\bar{A}_1 S_1)^* Q_y^{-1} (\bar{A}_1 S_1)]^{-1} - \mu [(S_1^* S_1)^{-1} S_1^* P_{s_1} H_{x_1} P_{s_1}^* S_1 (S_1^* S_1)^{-1}] | = 0$$

ofwel, gebruik makend van het feit dat  $\bar{V}_1^* S_1$  vierkant en regulier is

$$(20) \quad \left| \begin{array}{c} [(\bar{A}_1 S_1)^* Q_y^{-1} (\bar{A}_1 S_1)]^{-1} - \\ \mu [(S_1^* S_1)^{-1} S_1^* P_{s_1} H_{x_1} P_{s_1}^* S_1 (S_1^* S_1)^{-1}] \end{array} \right| = 0$$

Deze formule lijkt nogal ingewikkeld, maar kan eenvoudig worden berekend, indien het coördinatenstelsel wordt gedefinieerd door het niet-stochastisch veronderstellen van twee netwerkpunten, de zgn. basispunten. In dat geval kan de eerste matrix in (20) worden berekend als de inverse van de normaalmatrix, gereduceerd voor  $x_2$ , waaruit de basispunten zijn geëlimineerd. Voor de tweede matrix, de S-getransformeerde criteriummatrix, zijn analytische formules voorhanden; zie [4] en [5].

Zoals gezegd kan de vector  $x_1$  betrekking hebben op alle coördinaten van het puntenveld, maar ook op slechts een deel (deelnet). Met behulp van deelnetten kunnen dan qua precisie zwakke delen van het puntenveld worden gelokaliseerd.

Naast het controleren of de precisie aan een gesteld criterium voldoet, kan het algemene eigenwaardeprobleem (20) ook worden toegepast om de parameters in  $H_{x_1}$  zodanig te bepalen, dat een goede vervangingsmatrix voor  $Q_{x_1}$  wordt verkregen. Laten we de structuur van  $H_{x_1}$  onveranderd en nemen we genoegen met een met de scalar  $c$  geschaalde  $H_{x_1}$ , d.w.z.  $c.H_{x_1}$ , dan kan voor de scalar  $c$  de grootste eigenwaarde  $\mu_{\max}$  van (20) worden genomen. De matrix  $c.H_{x_1}$  is op deze wijze een heel voorzichtige vervanging van  $Q_{x_1}$ : de precisie wordt nooit onderschat, maar een groot aantal schatbare functies van  $\hat{x}_1$  kunnen wel flink worden overschat.

Indien deze wijze van vervanging is toegestaan, heeft zij het grote voordeel, dat men de precisie van de vector  $\hat{x}_1$  met slechts een paar parameters kan beschrijven. Voor het aansluitingsprobleem van vrije netwerken aan het RD-netwerk heeft deze methode al zijn grote nut bezeten; zie [4] en [7]. De vraag of deze methode van vervanging ook op geheel andere aansluitingsproblemen adequaat kan worden toegepast, moeten we voorlopig, vanwege het ontbreken van kennis omtrent de juiste structuur van  $H_{x_1}$ , nog onbeantwoord laten.

## 5. Résumé toetsingstheorie

Met toetsing wordt beoogd de aannamen (de zgn. nulhypothese) omtrent het mathematisch model, dat bestaat uit functiemodel en kansmodel, te controleren. Indien deze nulhypothese niet juist is, zijn de berekende LKK-schatters  $\hat{y}$  en  $\hat{x}$  niet optimaal en geeft de precisie een onjuist beeld van de mogelijke afwijkingen van de berekende schatters ten opzichte van hun verwachtingswaarde.

De nulhypothese wordt mathematisch beschreven als

$$(21) \quad H_0: \quad y \sim N(A \quad x, \quad Q_y), \text{ rang } A = r_A$$

$\begin{matrix} mx1 & & mxn & nx1 & mxm \end{matrix}$

Naast het controleren van  $H_0$  heeft de toetsing ook tot doel de eventuele onjuistheden in de nulhypothese zo scherp mogelijk te kunnen aanduiden. Dit laatste gebeurt door na te gaan of een ander, ruimer model, een zgn. alternatieve hypothese  $H_{a_1}$  beter bij het waarnemingsmateriaal past dan  $H_0$  om vervolgens:

- hetzij de nulhypothese aan te passen aan het waarnemingsmateriaal, bijvoorbeeld foutieve waarnemingen weglaten, standaardafwijkingen aanpassen:  $H_0$  wordt vervangen door  $H_{a_1}$ .
- hetzij het waarnemingsmateriaal aan te passen aan de nulhypothese, bijvoorbeeld fouten verbeteren, overmeten.

Bij een zorgvuldige inschakeling van het model zal de

tweede optie in het algemeen de voorkeur verdienen, omdat het waarnemingsmateriaal immers niet aan de geïstelde verwachtingen voldoet. In dit kader richten we ons op mogelijke fouten in het functiemodel, zodat we in zijn algemeenheid als alternatieve hypothese formuleren, zie [3], [6], [7]:

$$(22) \quad H_{a_i}: y \sim N(Ax + C_i \nabla_i, Q_y),$$

$\begin{matrix} mx1 & mxn & nx1 & mx1 & bx1 & mxm \end{matrix}$

rang  $C_i = b, \quad 1 \leq b \leq m - r_A$ .

In de toetsing wordt de nulhypothese verworpen, zodra wordt aangetoond, dat een alternatieve hypothese significant beter is. Hiertoe wordt het verschil beschouwd tussen de twee LKK-schatters van de verwachting van  $y$ , verkregen onder de nulhypothese en onder de alternatieve hypothese, met als toetsgroottheid:

$$(23) \quad T_b = \| \{ \hat{y} | H_0 \} - \{ \hat{y} | H_{a_i} \} \|^2$$

Deze toetsgroottheid kan uit het resultaat van de vereffening onder  $H_0$  worden berekend als:

$$(24) \quad T_b = \hat{\epsilon}^* Q_y^{-1} C_i [C_i^* Q_y^{-1} Q_\epsilon Q_y^{-1} C_i]^{-1} C_i^* Q_y^{-1} \hat{\epsilon},$$

waarbij

$$(25) \quad \begin{cases} \hat{\epsilon} = (I - P_A)y, & \text{de LKK-correctie} \\ Q_\epsilon = (I - P_A)Q_y \\ P_A = AS[(AS)^* Q_y^{-1} (AS)]^{-1} (AS)^* Q_y^{-1} \end{cases}$$

De toetsgroottheid  $T_b$  heeft als verdeling, zie [3]:

$$(26) \quad \begin{cases} \text{indien } H_0 \text{ geldt: } T_b \sim \chi^2(b, 0) = bF(b, \infty; 0) \\ \text{indien } H_{a_i} \text{ geldt: } T_b \sim \chi^2(b, \lambda_i) = bF(b, \infty; \lambda_i), \\ \text{met: } \lambda_i = \nabla_i^* C_i^* Q_y^{-1} Q_\epsilon Q_y^{-1} C_i \nabla_i \end{cases}$$

waarbij  $\lambda_i$  de niet-centraliteitsparameter van de toets is. De toets houdt in:

$$(27) \quad \text{Verwerp } H_0 \text{ als } T_b \geq \chi_{\alpha; b}^2 = bF_{\alpha; b, \infty}$$

waarbij  $\chi_{\alpha; b}^2$  de te kiezen kritieke waarde is. Verwerpen van de nulhypothese houdt overigens niet automatisch in: „aanvaard deze alternatieve hypothese“. Vele andere alternatieve hypothesen kunnen nog beter bij het waarnemingsmateriaal passen. De kunst is die alternatieve hypothese te vinden, welke het beste past en tevens plausibel is. Hiertoe zijn verschillende *toetsstrategieën* ontwikkeld, met als succesvol voorbeeld „data snooping“ in de B-methode van toetsen; zie [4], [6], [7] en [8].

Afhankelijk van de formulering van de alternatieve hypothesen, met name de dimensie  $b$  van  $\nabla_i$  in het functiemodel, kan de algemene beschrijving van de toetsgroottheid  $T_b$  in (23), c.q. (24) nader worden uitgewerkt:

### 1. Globale toets

De globale toets heeft primair tot doel te controleren of de nulhypothese mogelijk onjuist is. Hiertoe wordt de alternatieve hypothese zo ruim mogelijk beschreven, namelijk met  $C_i$  zodanig dat de matrix

$$(28) \quad (AS : C_i) \text{ vierkant en regulier is, dus } b = m - r_A.$$

De bijbehorende toetsgroottheid  $T_{m-r_A}$  is dan af te leiden door uitwerking van (24), maar volgt eenvoudiger uit (23). Immers  $m = r_A + b$ , zodat onder deze alternatieve hypothese aan de waarnemingen geen voorwaarden worden opgelegd. Dus

$$(29) \quad \{ \hat{y} | H_{a_i} \} = y,$$

zodat met (26)

$$\begin{aligned} T_{m-r_A} &= \| \{ \hat{y} | H_0 \} - \{ \hat{y} | H_{a_i} \} \|^2 \\ &= \| \{ \hat{y} | H_0 \} - y \|^2 \\ &= \| \hat{\epsilon} \|^2 \end{aligned}$$

ofwel

$$(30) \quad T_{m-r_A} = \hat{\epsilon}^* Q_y^{-1} \hat{\epsilon}$$

De verdeling van  $T_{m-r_A}$  en de toets volgen eenvoudig uit (26) en (27) door  $b$  te vervangen door  $m - r_A$ . Verwerping van de nulhypothese geeft door de „ruimheid“ van de alternatieve hypothese geen enkele indicatie omtrent specifieke fouten in de aannamen in de nulhypothese: „alles“ kan fout zijn.

Voor het verifiëren van een nadere specificatie in de alternatieve hypothese dienen beide volgende toetsen.

### 2. b-dimensionale toets

Hierbij geldt

$$(31) \quad \text{rang } C_i = b; \quad 1 \leq b \leq m - r_A$$

De alternatieve hypothese is hier nader gespecificeerd, maar hiervoor zijn meerdere parameters  $\nabla_i$  nodig. Voorbeelden zijn:

- nagaan of een refractiemodel beschreven met meerdere parameters nodig is;
- de coördinaten van een of meer aansluitpunten zijn beide fout;
- het puntenveld is affien vervormd.

In dit geval vindt men volgens de algemene formulering (24) als toetsgroottheid:

$$(32) \quad T_b = \hat{\epsilon}^* Q_y^{-1} C_i [C_i^* Q_y^{-1} Q_\epsilon Q_y^{-1} C_i]^{-1} C_i^* Q_y^{-1} \hat{\epsilon}$$

met een verdeling en toets als in (26) en (27).

### 3. Eéndimensionale toets (w-toets)

De alternatieve hypothese wordt hierbij met gebruikmaking van slechts één parameter  $\nabla_i$  gespecificeerd, zodat de matrix  $C_i$  een vector  $c_i$  wordt ( $b = 1$ ). Uit (24) volgt dan

$$\begin{aligned} T_1 &= \hat{\epsilon}^* Q_y^{-1} c_i [c_i^* Q_y^{-1} Q_\epsilon Q_y^{-1} c_i]^{-1} c_i^* Q_y^{-1} \hat{\epsilon} \\ &= \frac{(c_i^* Q_y^{-1} \hat{\epsilon})^2}{c_i^* Q_y^{-1} Q_\epsilon Q_y^{-1} c_i} \end{aligned}$$

ofwel

$$(33) \quad |w_i| = T_1^{\frac{1}{2}} = \frac{|c_i^* Q_y^{-1} \hat{\epsilon}|}{\sqrt{c_i^* Q_y^{-1} Q_\epsilon Q_y^{-1} c_i}}$$

De verdeling luidt:

$$(34) \quad \begin{cases} \text{indien } H_0 \text{ geldt: } T_1 \sim \chi^2(1, 0) \quad \text{resp. } w_i \sim N(0, 1) \\ \text{indien } H_{a_i} \text{ geldt: } T_1 \sim \chi^2(1, \lambda_i) \quad \text{resp. } w_i \sim N(\sqrt{\lambda_i}, 1) \\ \text{met: } \lambda_i = c_i^* Q_y^{-1} Q_\epsilon Q_y^{-1} c_i \end{cases}$$

en de toets:

$$(35) \quad \text{Verwerp } H_0 \text{ als: } T_1 \geq \chi_{\alpha; 1}^2 \quad \text{resp. } |w_i| \geq N_{\frac{1}{2}\alpha}$$

Als de nulhypothese wordt verworpen, is de meest

waarschijnlijke alternatieve hypothese die  $H_a$ , waarop met een der drie bovengenoemde typen toetsen is getoetst en waarvoor het quotiënt  $T_b/X_{\alpha,b}^2$  het grootst is. Dit geldt echter alleen, indien de kritieke waarden  $X_{\alpha,b}^2$  bij verschillende dimensies  $b$  onderling worden afgestemd volgens de B-methode van toetsen:

$$(36) \quad \lambda_i = \nabla_i^* C_i^* Q_y^{-1} Q_\varepsilon Q_y^{-1} C_i \nabla_i \\ = \lambda(\alpha_i, \beta_0, b) = \text{constant}$$

Omdat nooit alle mogelijke alternatieve hypothesen kunnen worden getoetst, dient altijd zeer zorgvuldig te worden nagegaan welke toetsen moeten worden uitgevoerd; de kans op het optreden van een bepaalde alternatieve hypothese speelt daarbij een belangrijke rol.

## 6. Résumé betrouwbaarheid

Door middel van betrouwbaarheidsparameters wordt beschreven in hoeverre de uitgevoerde toetsen in staat zijn foutieve aannamen in de nulhypothese te constateren, de zgn. *inwendige betrouwbaarheid*, en wat het effect kan zijn van onontdekte fouten na toetsing op de berekende LKK-schatters, de zgn. *uitwendige betrouwbaarheid*.

De inwendige betrouwbaarheid, de grootte van de modelfout volgens  $H_0$ , welke door de toets met onderscheidingsvermogen  $\beta$  kan worden aangetoond, wordt bepaald door de niet-centraliteitsparameter  $\lambda_i$  van de toets, waarvoor geldt, zie (36):

$$(37) \quad \lambda_i = \nabla_i^* C_i^* Q_y^{-1} Q_\varepsilon Q_y^{-1} C_i \nabla_i = \text{constant}$$

Met (25) kunnen we (37) ook schrijven als

$$(37') \quad \lambda_i = \|(I - P_A) C_i \nabla_i\|^2 = \text{constant}$$

(37), c.q. (37') beschrijft een  $b$ -dimensionale (hyper)ellipsoïde als meetkundige plaats voor de vector  $\nabla_i$ , opdat deze modelfout (de zgn. grenswaarde) met onderscheidingsvermogen  $\beta$  wordt gedetecteerd. In het algemeen is de  $b$ -dimensionale vector  $\nabla_i$  dus niet eenduidig uit (37) te bepalen. Met de eenheidsvector  $e$  gedefinieerd als

$$(38) \quad e = \nabla_i / \|\nabla_i\|$$

kunnen we de hyperellipsoïde (37) c.q. (37') in parametrische vorm schrijven als:

$$(39) \quad C_i \nabla_i = C_i e \sqrt{\frac{\lambda_i}{e^* C_i^* Q_y^{-1} Q_\varepsilon Q_y^{-1} C_i e}}$$

De norm

$$(40) \quad \lambda_{i,y} = \|C_i \nabla_i\|^2 = \nabla_i^* C_i^* Q_y^{-1} C_i \nabla_i$$

van de modelfout  $C_i \nabla_i$  kan dan met (39) worden berekend als

$$(41) \quad \lambda_{i,y} = \frac{e^* C_i^* Q_y^{-1} C_i e}{e^* C_i^* Q_y^{-1} Q_\varepsilon Q_y^{-1} C_i e} \lambda_i$$

Een bovengrens van  $\lambda_{i,y}$  wordt gegeven door

$$(42) \quad \lambda_{i,y} \leq \frac{\lambda_i}{\mu_{\min}}$$

waarbij  $\mu_{\min}$  de kleinste eigenwaarde is van het algemene eigenwaardeprobleem

$$(43) \quad |C_i^* Q_y^{-1} Q_\varepsilon Q_y^{-1} C_i - \mu C_i^* Q_y^{-1} C_i| = 0.$$

Twee in de praktijk veel voorkomende gevallen zijn de

tweedimensionale toets op een mogelijke fout in (de twee coördinaten van) een gegeven punt (een „verstoring”) en de ééndimensionale toets op een mogelijke fout in een enkele waarneming. In het tweedimensionale geval kan de grenswaarde-ellips (37), door te stellen

$$(44) \quad e = (\cos \gamma \sin \gamma)^*,$$

met behulp van (39) als functie van de richting  $\gamma$  worden beschreven als

$$(45) \quad C_i (\nabla_i)_\gamma = C_i e \sqrt{\frac{\lambda_i}{e^* C_i^* Q_y^{-1} Q_\varepsilon Q_y^{-1} C_i e}}, \\ e = (\cos \gamma \sin \gamma)^*$$

In het ééndimensionale geval ( $w_i$ -toets,  $b=1$ ) vinden we met  $\|e\|=1$  en  $C_i = c_i$  uit (39):

$$(46) \quad c_i |\nabla_i| = c_i \sqrt{\frac{\lambda_i}{c_i^* Q_y^{-1} Q_\varepsilon Q_y^{-1} c_i}}$$

De inwendige betrouwbaarheid beschreven door  $C_i \nabla_i$  of  $\lambda_{i,y}$  kan voor sommige alternatieve hypothesen oneindig slecht zijn: sommige modelfouten zijn met de gegeven nulhypothese eenvoudig niet te ontdekken. Daarom wordt altijd voorafgaande aan de realisatie van de meetopzet een aantal alternatieve hypothesen geselecteerd aan de hand waarvan men de betrouwbaarheid wil beoordelen. Een belangrijk selectie criterium hierbij is de kans op optreden van een alternatieve hypothese. De inwendige betrouwbaarheid kan dan middels de opzet van het model  $H_0$  (de *verkenning*) worden beïnvloed.

Door de formulering van de alternatieve hypothese middels  $C_i \nabla_i$  beschrijft de inwendige betrouwbaarheid in feite de invloed van de modelfout op de waarnemingen:

$$(47) \quad E\{y | H_0\} - E\{y | H_{a_i}\} = C_i \nabla_i \text{ }^{noem} \nabla_i y$$

Hieraan is ook de aanduiding  $\lambda_{i,y}$  voor de norm van de modelfout ontleend; vergelijk met (37'):

$$(48) \quad \lambda_{i,y} = \|E\{y | H_0\} - E\{y | H_{a_i}\}\|^2 \\ = \|C_i \nabla_i\|^2 \\ = \|\nabla_i y\|^2$$

Van meer praktisch belang is evenwel de zgn. *uitwendige betrouwbaarheid*. Dit is de invloed van een modelfout op het eindresultaat, ofwel de invloed op relevante schatbare functies van (een gedeelte  $\hat{x}_1$  van)  $\hat{x}$ . Met (6) wordt de invloed van een modelfout  $\nabla_i y$  op de onbekenden gegeven door

$$(49) \quad E\{\hat{x} | H_{a_i}\} - E\{\hat{x} | H_0\} = \widehat{\nabla}_i \hat{x} \\ = S[(AS)^* Q_y^{-1} (AS)]^{-1} (AS)^* Q_y^{-1} \nabla_i y,$$

op de vereffende waarnemingen door:

$$(50) \quad E\{\hat{y} | H_{a_i}\} - E\{\hat{y} | H_0\} = \widehat{\nabla}_i \hat{y} = A \widehat{\nabla}_i \hat{x} = P_A \nabla_i y$$

en op de LKK-correcties door:

$$(51) \quad E\{\hat{\varepsilon} | H_{a_i}\} - E\{\hat{\varepsilon} | H_0\} = \nabla_i \hat{\varepsilon} \\ = \nabla_i y - A \widehat{\nabla}_i \hat{x} = (I - P_A) \nabla_i y.$$

De invloed van een modelfout  $\nabla_i y$  op het deel  $x_1$  wordt met (12) gegeven door

$$(52) \quad \widehat{\nabla}_i x_1 = S_1 [(\bar{A}_1 S_1)^* Q_y^{-1} (\bar{A}_1 S_1)]^{-1} (\bar{A}_1 S_1)^* Q_y^{-1} \nabla_i y$$

Voor een willekeurige schatbare functie  $\Theta$  van het relevante deel  $x_1$  van de onbekenden vinden we dan met (8), (9) en (52):

$$\begin{aligned}
 (53) \quad \widehat{\nabla}_i \theta &= a_1^* \widehat{\nabla}_i x_1 \\
 &= 1^* A_1 \widehat{\nabla}_i x_1, \text{ want } a_1 = A_1^* 1 \\
 &= 1^* (I - P_{A_2}) A_1 \widehat{\nabla}_i x_1, \text{ want } 0 = A_2^* 1 \\
 &= 1^* \bar{A}_1 \widehat{\nabla}_i x_1, \text{ omdat } \bar{A}_1 = (I - P_{A_2}) A_1 \\
 (52) &= 1^* P_{\bar{A}_1} \nabla_i y,
 \end{aligned}$$

waarbij

$$(54) \quad P_{\bar{A}_1} = (\bar{A}_1 S_1) [(\bar{A}_1 S_1)^* Q_y^{-1} (\bar{A}_1 S_1)]^{-1} (\bar{A}_1 S_1)^* Q_y^{-1}$$

Daar

$$\begin{aligned}
 R(A_1 : A_2) &= R(\bar{A}_1 : A_2) \\
 \text{met } \bar{A}_1 &= (I - P_{A_2}) A_1 \text{ en } \bar{A}_1^* Q_y^{-1} A_2 = 0,
 \end{aligned}$$

wordt het verband tussen  $P_A$  en  $P_{\bar{A}_1}$  gegeven door, zie fig. 2 en ook [3]:

$$(55) \quad P_A = P_{\bar{A}_1} + P_{A_2}$$

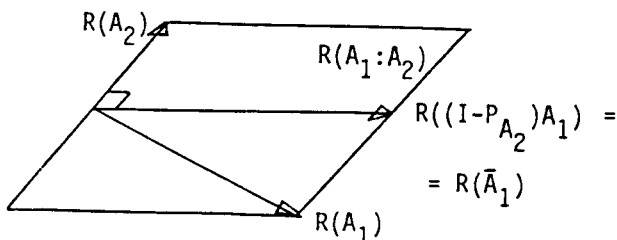


Fig. 2. Verband tussen de projectoren  $P_{\bar{A}_1}$  en  $P_{A_2}$

Vanwege

$$(56) \quad P_{\bar{A}_1} = Q_y P_{\bar{A}_1}^* Q_y^{-1} P_{\bar{A}_1},$$

wordt (53):

$$\begin{aligned}
 (57) \quad \widehat{\nabla}_i \theta &= 1^* Q_y P_{\bar{A}_1}^* Q_y^{-1} P_{\bar{A}_1} \nabla_i y \\
 &= (P_{\bar{A}_1} Q_y 1)^* Q_y^{-1} (P_{\bar{A}_1} \nabla_i y) \\
 &= \| P_{\bar{A}_1} Q_y 1 \| \| P_{\bar{A}_1} \nabla_i y \| \cos \alpha \\
 \text{met } \alpha &= \angle (P_{\bar{A}_1} Q_y 1, P_{\bar{A}_1} \nabla_i y)
 \end{aligned}$$

Een bovengrens voor  $|\widehat{\nabla}_i \theta|$  wordt dus gegeven door:

$$(58) \quad |\widehat{\nabla}_i \theta| \leq \| P_{\bar{A}_1} Q_y 1 \| \| P_{\bar{A}_1} \nabla_i y \|^2$$

Met

$$\begin{aligned}
 (59) \quad \| P_{\bar{A}_1} Q_y 1 \|^2 &= 1^* Q_y P_{\bar{A}_1}^* Q_y^{-1} P_{\bar{A}_1} Q_y 1 \\
 (56) &= 1^* P_{\bar{A}_1} Q_y 1 \\
 (54) &= 1^* (\bar{A}_1 S_1) [(\bar{A}_1 S_1)^* Q_y^{-1} (\bar{A}_1 S_1)]^{-1} (\bar{A}_1 S_1)^* 1 \\
 (12) &= 1^* \bar{A}_1 Q_{\bar{x}_1} \bar{A}_1^* 1 \\
 (8) &= 1^* A_1 Q_{\bar{x}_1} A_1^* 1 \\
 (8) &= a_1^* Q_{\bar{x}_1} a_1 \\
 (9) &= \sigma_{\hat{\theta}}^2
 \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
 (60) \quad \| P_{\bar{A}_1} \nabla_i y \|^2 &= \nabla_i y^* Q_y^{-1} (\bar{A}_1 S_1) [(\bar{A}_1 S_1)^* Q_y^{-1} (\bar{A}_1 S_1)]^{-1} (\bar{A}_1 S_1)^* Q_y^{-1} \nabla_i y \\
 (52) &= \widehat{\nabla}_i x_1^* (\bar{A}_1^* Q_y^{-1} \bar{A}_1) \widehat{\nabla}_i x_1 \\
 &= \| \widehat{\nabla}_i x_1 \|^2 \\
 \text{noem} &= \lambda_{i, \bar{x}_1}
 \end{aligned}$$

kan (58) ook worden geschreven als

$$(61) \quad |\widehat{\nabla}_i \theta| \leq \sigma_{\hat{\theta}} \sqrt{\lambda_{i, \bar{x}_1}}$$

De absolute waarde van de grenswaarde van een willekeurige schatbare functie  $\theta = a_1^* x_1$  wordt dus van boven begrensd door het produkt van de standaardafwijking  $\sigma_{\hat{\theta}}$  en de lengte  $\sqrt{\lambda_{i, \bar{x}_1}}$  van de uitwendige betrouwbaarheidsvector  $\widehat{\nabla}_i x_1$ . Een handige formule voor de berekening van  $\lambda_{i, \bar{x}_1}$  leiden we af via:

$$\begin{aligned}
 (62) \quad \lambda_{i, y} &= \| \nabla_i y \|^2 \\
 &= \| P_A \nabla_i y \|^2 + \| (I - P_A) \nabla_i y \|^2 \\
 (51) &= \| P_A \nabla_i y \|^2 + \| \widehat{\nabla}_i \epsilon \|^2 \\
 (37') &= \| P_A \nabla_i y \|^2 + \lambda_i \\
 (55) &= \| P_{\bar{A}_1} \nabla_i y \|^2 + \| P_{A_2} \nabla_i y \|^2 + \lambda_i \\
 (60) &= \lambda_{i, \bar{x}_1} + \| P_{A_2} \nabla_i y \|^2 + \lambda_i
 \end{aligned}$$

zodat

$$(63) \quad \lambda_{i, \bar{x}_1} = \lambda_{i, y} - \lambda_i - \nabla_i y^* Q_y^{-1} A_2 (A_2^* Q_y^{-1} A_2)^{-1} A_2^* Q_y^{-1} \nabla_i y$$

Het handige van deze formulering ligt in het feit, dat in tegenstelling tot (60)  $\lambda_{i, \bar{x}_1}$  met behulp van (63) kan worden berekend zonder dat de vector  $\widehat{\nabla}_i x_1$  expliciet is gegeven. De berekening van de vector  $\widehat{\nabla}_i x_1$  vergt in het algemeen namelijk de inversie van vrij grote matrices. De betrouwbaarheidsmaat  $\lambda_{i, \bar{x}_1}$  wordt ook wel aangeduid met  $\lambda$ -streep.

Merk op dat formule (63) het verband geeft tussen de inwendige betrouwbaarheid  $\lambda_{i, y}$  en uitwendige betrouwbaarheid  $\lambda_{i, \bar{x}_1}$ . In de praktijk wordt de uitwendige betrouwbaarheid veelal beschreven met behulp van de grootheden  $\lambda_{i, \bar{x}_1}$  in plaats van de vectoren  $\widehat{\nabla}_i x_1$ . De vectoren  $\widehat{\nabla}_i x_1$  zijn namelijk moeilijk hanteerbaar vanwege de afhankelijkheid van de basis- of coördinaatdefinitie en vanwege de grote aantallen getallen: iedere alternatieve hypothese levert een vector  $\widehat{\nabla}_i x_1$ . De  $\lambda_{i, \bar{x}_1}$ 's zijn daarentegen onafhankelijk van de gekozen oneindig gewogen minimumcondities. Formule (61) geeft dan de mogelijkheid om het effect af te schatten op een willekeurige schatbare functie  $\theta$ .

#### Literatuur

1. Teunissen, P. J. G., M. A. Salzmann en H. M. de Heus, *Over het aansluiten van puntenvelden (1) — Het rangdefecte lineaire tweede standaardvraagstuk*. NGT Geodesia 1987, no. 5, p. 181-188.
2. Teunissen, P. J. G., M. A. Salzmann en H. M. de Heus, *Over het aansluiten van puntenvelden (2) — De aansluitingsvereffening*. NGT Geodesia 1987, no. 6, p. 229-235 en NGT Geodesia 1987, no. 7/8, p. 270-273.

3. Teunissen, P. J. G., M. A. Salzmann en H. M. de Heus, *Theory of Connecting Geodetic Pointfields, with applications*. TU Delft, in druk. 1987.
  4. Brouwer, F. J. J., D. T. van Daalen, H. M. de Heus, J. T. Gravesteijn, J. J. Kok en P. J. G. Teunissen, *The Delft Approach for the Design and Computation of Geodetic Networks*. Feestbundel t.g.v. 65ste verjaardag van prof. Baarda. Afdeling der Geodesie, Delft. 1982.
  5. Baarda, W., *S-Transformations and Criterion Matrices*. Netherlands Geodetic Commission, New Series Vol. 5, No. 1, 1973, Delft.
  6. Kok, J. J., *On Data Snooping and Multiple Outlier Testing*. NOAA Technical Report NOS NGS 30, 1984.
  7. Teunissen, P. J. G., *Quality Control in Geodetic Networks*. In: *Optimization and Design of Geodetic Networks*, p. 526-547. Eds. Grafarend and Sansò. Springer Verlag, 1984.
  8. Baarda, W., *A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks*. Netherlands Geodetic Commission, New Series Vol. 2, No. 5, 1968, Delft.
-

# Over het aansluiten van puntenvelden (3): Kwaliteitsaspecten van de aansluiting (vervolg)<sup>1)</sup>

door dr. ir. P. J. G. Teunissen, ir. M. A. Salzmann en ir. H. M. de Heus, Faculteit der Geodesie van de Technische Universiteit Delft.

## 7. Toetsing bij aansluiting

In [2]<sup>2)</sup> hebben we laten zien dat het model van de aansluiting, de nulhypothese  $H_0$ , kan worden geformuleerd als:

$$(64) \quad H_0: E \left\{ \begin{matrix} \hat{x}_1^{(1)} \\ \hat{x}_2^{(1)} \\ \hat{x}_2^{(2)} \\ \hat{x}_3^{(2)} \end{matrix} \right\} = \begin{pmatrix} I & & & \\ & I & & \\ & & I & \\ & & & I \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ t \end{matrix}; \quad \begin{pmatrix} Q_x^{(1)} & 0 \\ 0 & Q_x^{(2)} \end{pmatrix}$$

We beschouwen de volgende drie klassen van alternatieve hypothesen:

$H_A$ : Een modelfout  $E\{\hat{x}^{(1)}\}$  ten gevolge van een onontdekte fout in netwerk (1).

Het zal duidelijk zijn, dat een fout in  $E\{\hat{x}_1^{(1)}\}$  niet met het model (64) valt te constateren, daar  $\hat{x}_1^{(1)}$  niet in het conditiemodel van (64) voorkomt. Een fout in  $E\{\hat{x}_2^{(1)}\}$  kan daarentegen wel met (64) worden getoetst, maar voor het kunnen identificeren van een fout in  $E\{\hat{x}_2^{(1)}\}$  als een bepaalde onontdekte fout in netwerk (1) hebben we de oorspronkelijke designmatrix (meetopzet) van netwerk (1) nodig. Deze zal in de praktijk echter veelal niet meer voorhanden zijn. Bovendien kan het voorkomen, dat ten tijde van de aansluiting de oorspronkelijke covariantiematrix  $Q_x^{(1)}$  niet meer bekend is en daarom zal moeten worden volstaan met een (benaderde) vervangingsmatrix. Men zal dus bij het ontwerpen van netwerk (1) niet te veel vertrouwen moeten hebben in de „detectiekracht“ van model (64) voor fouten in  $E\{\hat{x}_2^{(1)}\}$  ten gevolge van onontdekte fouten in het netwerk. Netwerk (1) zal zelf betrouwbaar genoeg moeten zijn om mogelijke modelfouten via toetsing te kunnen opsporen.

De bij de hypothesen  $H_A$  behorende betrouwbaar-

heid verkrijgen we door de uitwendige betrouwbaarheid  $\hat{\nabla}_i \hat{x}^{(1)}$  van netwerk (1) via model (64) voort te planten. In de hoofdstukken 8 en 9 komen we hierop terug.

$H_B$ : Een modelfout in  $E\{\hat{x}_2^{(1)}\}$  (of  $E\{\hat{x}_2^{(2)}\}$ ) ten gevolge van bijvoorbeeld een puntidentificatiefout of een affiene deformatie.

Deze modelfouten zijn wel toetsbaar met model (64). De bijbehorende toetsgrootheden en inwendige betrouwbaarheid zullen hieronder worden afgeleid.

$H_C$ : Een modelfout in  $E\{\hat{x}^{(2)}\}$  ten gevolge van een onontdekte fout in netwerk (2).

Op grond van symmetrieoverwegingen geldt voor  $H_C$  hetzelfde als hetgeen voor  $H_A$  is gesteld.

### Hypothesen $H_B$

In [2] hebben we laten zien, dat model (64) kan worden gereduceerd tot het deelmodel

$$(65) \quad H_0: E\{d\} = -v_2^t t, \quad Q_d.$$

Met de alternatieve hypothese

$$(66) \quad H_{A_i}: E\{d\} = (-v_2^t; c_i) \begin{pmatrix} t \\ \nabla_i \end{pmatrix}, \quad Q_d.$$

levert toepassing van (30) voor de globale toets van model (64) de toetsgrootheid:

$$(67) \quad \begin{cases} T = \hat{\epsilon}_d^* Q_d^{-1} \hat{\epsilon}_d, \text{ met} \\ \hat{\epsilon}_d = -(I - v_2^t [v_2^t Q_d^{-1} v_2^t]^{-1} v_2^t Q_d^{-1}) d. \text{ (zie [2], (9))} \end{cases}$$

Uitgeschreven geeft (67):

$$(67') \quad \begin{cases} T = d^* \Phi d, \text{ met} \\ \Phi = Q_d^{-1} - Q_d^{-1} v_2^t [v_2^t Q_d^{-1} v_2^t]^{-1} v_2^t Q_d^{-1} \end{cases}$$

Wanneer gebruik wordt gemaakt van de resultaten van hoofdstuk 7 in [2]:

$$(68) \quad \begin{aligned} \Phi &= Q_d^{-1} - Q_d^{-1} v_2^t [v_2^t Q_d^{-1} v_2^t]^{-1} v_2^t Q_d^{-1} \\ &= P_{s_2}^* [P_{s_2} (Q_{22}^{(1)} + Q_{22}^{(2)}) P_{s_2}^* + \bar{S}_{2 \rightarrow 2}^{-1}]^{-1} P_{s_2} \\ &= v_2^t [v_2^t Q_d v_2^t]^{-1} v_2^t \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Voortzetting van de mini-serie over het aansluiten van puntenvelden; deel 1 en deel 2 zijn geplaatst in het mei-, juni- en juli/augustus-nummer van NGT Geodesia.

Nu volgt het restant van deel 3 dat werd begonnen in het septembernummer.

<sup>2)</sup> De nummers [1] t.m. [10] verwijzen naar „Literatuur“ op p. 400 aan het eind van dit artikel.



ziet men, dat de toetsgrootheid  $T$  onafhankelijk is van de gekozen gewogen minimumcondities in beide netwerken. De globale toets voor model (64) toetst dan ook of de beide overlappende delen van de twee netwerken gelijkvormig zijn of niet.

Voor het afleiden van de toetsgrootheid  $T_b$  behorende bij de *b-dimensionale toets* van model (64) maken we gebruik van (32). Dit geeft dan:

$$(69) \quad T_b = \hat{\varepsilon}_d^* Q_d^{-1} C_i [C_i^* Q_d^{-1} Q_{\varepsilon_d} Q_d^{-1} C_i]^{-1} C_i^* Q_d^{-1} \hat{\varepsilon}_d$$

Uitgeschreven geeft (69):

$$(70) \quad T_b = d^* \Phi C_i [C_i^* \Phi C_i]^{-1} C_i^* \Phi d.$$

Om de bij deze toets behorende beschrijving van de inwendige betrouwbaarheid te verkrijgen, gaan we uit van (37):

$$(71) \quad \lambda_i = \nabla_i^* C_i^* Q_d^{-1} Q_{\varepsilon_d} Q_d^{-1} C_i \nabla_i \\ = \nabla_i^* C_i^* \Phi C_i \nabla_i = \text{constant}.$$

Analoog aan (39) vinden we dan:

$$(72) \quad C_i \nabla_i = C_i e \sqrt{\frac{\lambda_i}{e^* C_i^* \Phi C_i e}}$$

Daar deze grenswaarden betrekking hebben op de aansluitpunten, noteren we in plaats van (72) ook  $\nabla_i x_2^{(1)}$  (of  $\nabla_i x_2^{(2)}$ ). Ook de toetsgrootheid  $T_b$  en de grenswaarden (72) zijn onafhankelijk van de gekozen gewogen minimumcondities. We merken hier alvast op, dat de inwendige betrouwbaarheid die behoort bij de hypothesen  $H_B$  voor zowel de LKK-aansluiting als pseudo LKK-aansluiting geldt (zie de hoofdstukken 8 en 9).

Mogelijke keuzen voor de  $C_i$ -matrix zijn:

$$(73) \quad c = (0 \dots 1 0 \dots)^*,$$

voor het toetsen van punten per coördinaatrichting,

$$(74) \quad c = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots \end{pmatrix}^*,$$

voor het toetsen per punt, en

$$(75) \quad c = \left[ \dots \begin{pmatrix} x_i^0 & -y_i^0 \\ y_i^0 & x_i^0 \end{pmatrix} \dots \right]^*,$$

voor het toetsen van een affiene deformatie (zie [3]).

## 8. Betrouwbaarheid bij LKK-aansluiting

We zullen nu formules afleiden voor de invloed van een modelfout, geformuleerd volgens de drie klassen van alternatieve hypothesen  $H_A$ ,  $H_B$  en  $H_C$ , op het relevante deel van het eindresultaat van de aansluiting, namelijk de vereffende coördinaten. Daartoe partitioneren we het aansluitingsmodel zoals aangegeven in (64). In de notatie van de eerste zes hoofdstukken geldt dan:

$$(76) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 = \begin{pmatrix} I & & & \\ & I & & \\ & & I & \\ & & & I \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad x_2 = t \\ y = \begin{pmatrix} \hat{x}_1^{(1)} \\ \hat{x}_2^{(1)} \\ \hat{x}_2^{(2)} \\ \hat{x}_3^{(2)} \end{pmatrix}, \quad Q_y = \begin{pmatrix} Q_{\hat{x}}^{(1)} & 0 \\ 0 & Q_{\hat{x}}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \nabla_i y = \begin{pmatrix} \nabla_i x^{(1)} \\ \nabla_i x^{(2)} \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

We nemen nu even aan, dat beide netwerken met eindig gewogen minimumcondities zijn vereffend. Dan namelijk is matrix  $Q_y$  van (76) regulier en inverteerbaar. De uitwendige betrouwbaarheid berekenen we (62) met behulp van:

$$(77) \quad \lambda_{i, \hat{x}_1} = \|\nabla_i y\|^2 - \|\widehat{\nabla_i \varepsilon}\|^2 - \|P_{A_2} \nabla_i y\|^2.$$

Hypothesen  $H_A$

In dit geval is  $\nabla_i x^{(2)} = 0$  en dus

$$(78) \quad \|\nabla_i y\|^2 = \nabla_i x^{(1)*} Q_{\hat{x}}^{(1)-1} \nabla_i x^{(1)}$$

Tevens is  $A_2^* Q_y^{-1} \nabla_i y = 0$  en dus

$$(79) \quad \|P_{A_2} \nabla_i y\|^2 = 0$$

Met

$$(80) \quad \|\widehat{\nabla_i \varepsilon}\|^2 = \|\widehat{\nabla_i \varepsilon_d}\|^2 = \nabla_i x_2^{(1)*} \Phi \nabla_i x_2^{(1)},$$

(78), (79) en  $\lambda_{i, \hat{x}_1} = \lambda_{i, \hat{x}}$  volgt dan uit (77) dat

$$(81) \quad \lambda_{i, \hat{x}}^A = \nabla_i x^{(1)*} Q_{\hat{x}}^{(1)-1} \nabla_i x^{(1)} - \nabla_i x_2^{(1)*} \Phi \nabla_i x_2^{(1)}$$

Daar  $\nabla_i x^{(1)}$  de uitwendige betrouwbaarheidsvector is van de schatbare coördinaten, beschrijft de eerste term van het rechterlid van (81) de uitwendige betrouwbaarheid  $\lambda_{i, \hat{x}_1, \hat{x}_2}$  van het gehele eerste netwerk. Dus:

$$(82) \quad \lambda_{i, \hat{x}}^A = \lambda_{i, \hat{x}_1, \hat{x}_2}^{(1)} - \nabla_i x_2^{(1)*} \Phi \nabla_i x_2^{(1)} \quad (\text{exact})$$

Met behulp van (68) kunnen we (82) ook schrijven als

$$(82') \quad \lambda_{i, \hat{x}}^A = \lambda_{i, \hat{x}_1, \hat{x}_2}^{(1)} - \nabla_i x_2^{(1)*} P_{s_2}^* [P_{s_2} (Q_{22}^{(1)} + Q_{22}^{(2)}) P_{s_2}^* + S_2^{-1} S_2^{-1*}]^{-1} P_{s_2} \nabla_i x_2^{(1)}$$

of als

$$(82'') \quad \lambda_{i, \hat{x}}^A = \lambda_{i, \hat{x}_1, \hat{x}_2}^{(1)} - [\nabla_i x_2^{(1)*} Q_d^{-1} \nabla_i x_2^{(1)} - \nabla_i t^{(1)*} Q_t^{-1} \nabla_i t^{(1)}]$$

waarbij

$$(83) \quad \widehat{\nabla_i t}^{(1)} = -[V_2^* Q_d^{-1} V_2]^{-1} V_2^* Q_d^{-1} \nabla_i x_2^{(1)}; \\ Q_t = [V_2^* Q_d^{-1} V_2]^{-1},$$

zie [2] formule (9).

De term met de transformatieparameters in (82'') neutraliseert het regulariseringseffect van  $Q_d^{-1}$ . Dat wil zeggen dat deze term ervoor zorgt, dat de uitwendige betrouwbaarheidsparameter  $\lambda_{i, \hat{x}}^A$  de verandering van vorm van het aangesloten netwerk beschrijft. Het niet in rekening brengen van deze extra term komt bijvoorbeeld voor in de fotogrammetrie, indien bij de betrouwbaarheidsbeschrijving geen onderscheid wordt gemaakt tussen zgn. „a-stelsels” en schrankingsstelsels [10].

De formules (82) zijn exact, maar hebben het praktische bezwaar dat de gehele vector  $\nabla_i x_2^{(1)}$  bekend moet zijn. Een bruikbare benadering van (82) welke dit bezwaar niet heeft, verkrijgen we door gebruik te maken van de vervangingsmatrix  $H$  en het algemene eigenwaardeprobleem. Veronderstel dat

$$(84) \quad \begin{aligned} P_{s_2} (c_2^{(1)} H_{22}) P_{s_2}^* &\doteq P_{s_2} Q_{22}^{(1)} P_{s_2}^*; \\ P_{s_2} (c_2^{(2)} H_{22}) P_{s_2}^* &\doteq P_{s_2} Q_{22}^{(2)} P_{s_2}^* \end{aligned}$$

waarbij de scalars  $c_2^{(1)}$  en  $c_2^{(2)}$  via het algemene eigenwaardeprobleem (zie hoofdstuk 4) zijn verkregen. Dan geldt

$$(85) \quad P_{s_2} (Q_{22}^{(1)} + Q_{22}^{(2)}) P_{s_2}^* \doteq \frac{c_2^{(1)} + c_2^{(2)}}{c_2^{(1)}} P_{s_2} Q_{22}^{(1)} P_{s_2}^*.$$

Met (82') geeft dit

$$(86) \quad \lambda_{i,\bar{x}}^A \approx \lambda_{i,\bar{x}_1,\bar{x}_2}^{(1)} - \frac{c_2^{(1)}}{c_2^{(1)}+c_2^{(2)}} \lambda_{i,\bar{x}_2}^{(1)} \quad (\text{benaderd})$$

waarbij  $\lambda_{i,\bar{x}_2}^{(1)}$  de uitwendige betrouwbaarheid beschrijft van het deelnet van aansluitpunten van netwerk (1). Zowel de exacte formule (82) als de benaderingsformule (86) laten zien, dat de aansluiting een verbetering van de betrouwbaarheid (voor wat betreft de hypothesen  $H_A$ ) tot gevolg heeft. De verbetering is echter marginaal, indien  $c_2^{(1)}$  klein is ten opzichte van  $c_2^{(2)}$ . Denk hierbij aan aansluiting van een vrij netwerk aan een hogere orde (RD) netwerk.

**Hypothesen  $H_B$**

Toetsen we voor een modelfout in  $E\{\hat{x}_2^{(1)}\}$  dan is  $\nabla_i x^{(2)} = 0$  en  $\nabla_i x_1^{(1)} = 0$ . Met

$$(87) \quad \begin{cases} \|\nabla_i y\|^2 = \nabla_i x^{(1)*} Q_{\hat{x}}^{(1)-1} \nabla_i x^{(1)}, \text{ waarbij } \nabla_i x_1^{(1)} = 0 \\ \|\rho_{A_2} \nabla_i y\|^2 = 0 \\ \|\widehat{\nabla_i \varepsilon}\|^2 = \|\widehat{\nabla_i \varepsilon_d}\|^2 = \lambda_i, \text{ zie (71)} \\ \lambda_{i,\bar{x}_1} = \lambda_{i,\bar{x}}^B \end{cases}$$

volgt uit (77) dat

$$(88) \quad \lambda_{i,\bar{x}}^B = \nabla_i x^{(1)*} Q_{\hat{x}}^{(1)-1} \nabla_i x^{(1)} - \lambda_i, \text{ waarbij } \nabla_i x_1^{(1)} = 0.$$

Door onze aanname dat de vereffening van netwerk (1) met eindelijk gewogen minimumcondities is uitgevoerd, beschrijft  $\lambda_{i,\bar{x}}^B$  van (88) het effect van  $\nabla_i x^{(1)}$  op niet-schatbare coördinaten. We willen echter het effect op schatbare coördinaten beschrijven. Dit betekent dat in plaats van de weging met  $(Q_{\hat{x}}^{(1)})^{-1}$  in (88), gewogen moet worden met de oorspronkelijke normaalmatrix van netwerk (1). Daarom wordt de juiste betrouwbaarheidsbeschrijving in plaats van (88) gegeven door:

$$(89) \quad \begin{cases} \lambda_{i,\bar{x}}^B = \nabla_i x^{(1)*} [P_s Q_{\hat{x}}^{(1)} P_s^* + S^{-1} S^{-1*}]^{-1} P_s \nabla_i x^{(1)} - \lambda_i \\ \nabla_i x_1^{(1)} = 0 \quad (\text{exact}) \end{cases}$$

Een benaderingsformule voor (89) is nu niet nodig, daar de vectoren  $\nabla_i x^{(1)}$  bij de aansluitingsvereffening kunnen worden berekend.

De betrouwbaarheidsmaat  $\lambda_{i,\bar{x}}^B$  van (89) heeft betrekking op *alle* coördinaten van de twee aangesloten puntenvelden. Beperken we de uitwendige betrouwbaarheidsbeschrijving tot alleen het deelnet van de aansluitpunten, dan vinden we naar analogie van het bovenstaande:

$$(89') \quad \lambda_{i,\bar{x}_2}^B = \nabla_i x_2^{(1)*} [P_{s_2} Q_{\hat{x}_2}^{(1)} P_{s_2}^* + S_{s_2}^{-1} S_{s_2}^{-1*}]^{-1} P_{s_2} \nabla_i x_2^{(1)} - \lambda_i$$

**Hypothesen  $H_C$**

Vanwege de symmetrie met  $H_A$  vinden we

$$(90) \quad \lambda_{i,\bar{x}}^C = \lambda_{i,\bar{x}_2,\bar{x}_3}^{(2)} - \nabla_i x_2^{(2)*} \Phi \nabla_i x_2^{(2)} \quad (\text{exact})$$

en

$$(91) \quad \lambda_{i,\bar{x}}^C \approx \lambda_{i,\bar{x}_2,\bar{x}_3}^{(2)} - \frac{c_2^{(2)}}{c_2^{(1)}+c_2^{(2)}} \lambda_{i,\bar{x}_2}^{(2)} \quad (\text{benaderd})$$

**9. Betrouwbaarheid bij pseudo LKK-aansluiting**

In sommige toepassingen van de aansluitingsproblematiek kan het voorkomen dat als extra eis wordt gesteld, dat de coördinaten van één van de twee puntenvelden (bijvoorbeeld netwerk (1)) ongewijzigd moeten blijven. Denk bijvoorbeeld aan het aansluiten van een vrij netwerk aan een hogere orde netwerk (RD) of aan het uitbreiden van een digitaal coördinatenbestand. Gaan we ervan uit dat op netwerk (1) wordt aangesloten, dan kan dit type van aansluiting worden gerealiseerd door model (64) te vereffenen met  $Q_{\hat{x}}^{(1)} = 0$ . We spreken dan van een *pseudo LKK-aansluiting*.

Bij een pseudo LKK-aansluiting zullen, vanwege  $Q_{\hat{x}}^{(1)} = 0$ , de LKK-correcties aan de coördinaten van netwerk (1) gelijk aan nul zijn, en de LKK-correcties aan de coördinaten van netwerk (2) zodanig zijn, dat de vereffende coördinaten van de aansluitpunten van netwerk (2) samenvallen met die van netwerk (1). Hoewel de vereffening wordt uitgevoerd met  $Q_{\hat{x}}^{(1)} = 0$ , zal de toetsing met de oorspronkelijke  $Q_{\hat{x}}^{(1)}$  moeten worden uitgevoerd. Toetsing met  $Q_{\hat{x}}^{(1)} = 0$  is immers onrealistisch en zal te snel leiden tot een ten onrechte verwerpen van de nulhypothese, dus in het geval dat geen modelfouten in de gegeven coördinaten van netwerk (1) aanwezig zijn.

Doordat bij de pseudo LKK-aansluiting met de oorspronkelijke  $Q_{\hat{x}}^{(1)}$  wordt getoetst, zal de inwendige betrouwbaarheidsbeschrijving gelijk zijn aan die van de strenge LKK-aansluiting. Dus de toetsings- en inwendige betrouwbaarheidsformules van hoofdstuk 7, behorende bij de hypothesen  $H_B$ , zijn op zowel de strenge als pseudo LKK-aansluiting van toepassing.

Ondanks dat de inwendige betrouwbaarheid bij de twee typen van aansluiting gelijk is, zal de uitwendige betrouwbaarheid duidelijk verschillend zijn. Immers bij de pseudo LKK-aansluiting wordt de vereffening met  $Q_{\hat{x}}^{(1)} = 0$  uitgevoerd, terwijl bij de strenge LKK-aansluiting wordt vereffend met de oorspronkelijke  $Q_{\hat{x}}^{(1)}$ . Daar de  $\lambda$ -grootheden de vervorming van (een deel van) een netwerk ten gevolge van modelfouten beschrijven, kan voor de pseudo LKK-aansluiting de uitwendige betrouwbaarheid behorende bij de drie klassen van alternatieve hypothesen  $H_A$ ,  $H_B$  en  $H_C$  vrij gemakkelijk worden berekend.

**Hypothesen  $H_A$**

We hebben  $\nabla_i x^{(1)} = 0$ . Stel nu dat ook alle coördinaten van netwerk (2) ongewijzigd zouden blijven. Dan zou vervorming, beschreven door  $\lambda_{i,\bar{x}_1,\bar{x}_2}^{(1)}$ , onveranderd blijven. Dus

$$(92) \quad \lambda_{i,\bar{x}}^A = \lambda_{i,\bar{x}_1,\bar{x}_2}^{(1)}$$

Deze formule is exact. Vergelijking van (92) met (82) of (86) geeft aan dat, voor wat betreft de hypothesen  $H_A$ , de betrouwbaarheid bij pseudo LKK-aansluiting slechter is dan bij strenge LKK-aansluiting. Het verschil zal echter marginaal zijn, indien  $c_2^{(1)}$  klein is ten opzichte van  $c_2^{(2)}$ .

**Hypothesen  $H_B$**

Toetsen we voor een modelfout in  $E\{\hat{x}_2^{(1)}\}$ , dan hebben we  $\nabla_i x^{(2)} = 0$  en  $\nabla_i x_1^{(1)} = 0$ . De bij de toetsing op modelfouten in  $E\{\hat{x}_2^{(1)}\}$  behorende grenswaarden  $\nabla_i x_2^{(1)}$  zijn gelijk aan die zijn verkregen bij de strenge LKK-aansluiting. Nu beschrijft  $\|\nabla_i x_2^{(1)}\|^2$  de vervorming van het deelnet van de aansluitpunten vóór de aansluitingsvereffening. Bij de strenge LKK-aansluiting wordt deze vervorming over alle coördinaten uitgesmeerd. Bij de pseudo LKK-

aansluiting blijft de vervorming  $\|\nabla_i x_2^{(1)}\|^2$  echter „zitten waar die zit“. Daarom, vergelijk met (89):

$$(93) \quad \lambda_{i,\bar{x}}^B = \nabla_i x^{(1)*} P_s^* [P_s^* Q_s^{(1)} P_s^* + S^* S^{*+1}]^{-1} P_s^* \nabla_i x^{(1)} ; \nabla_i x_1^{(1)} = 0$$

Deze formule is exact. Ook hier is dus de betrouwbaarheid slechter dan in het geval van een strenge LKK-aansluiting.

#### Hypothesen $H_C$

We hebben  $\nabla_i x^{(1)} = 0$ . Stel nu dat ook alle coördinaten van netwerk (2) ongewijzigd zouden blijven. Dan zou analoog aan (92) gelden dat  $\lambda_{i,\bar{x}}^C = \lambda_{i,\bar{x}_2,\bar{x}_3}^{(2)}$ . Bij de pseudo LKK-aansluiting worden echter de coördinaten van het deelnet der aansluitpunten gelijkgesteld aan die van netwerk (1). Dit betekent, dat de vervorming  $\lambda_{i,\bar{x}_2}^{(2)}$  van het deelnet van aansluitpunten van netwerk (2) bij de pseudo LKK-aansluiting niet wordt overgenomen en dus van  $\lambda_{i,\bar{x}_2,\bar{x}_3}^{(2)}$  moet worden afgetrokken. Daarom geldt het volgende:

$$(94) \quad \lambda_{i,\bar{x}}^C = \lambda_{i,\bar{x}_2,\bar{x}_3}^{(2)} - \lambda_{i,\bar{x}_2}^{(2)}$$

Ook deze formule is exact. Vergelijking van (94) met (90) of (91) laat zien, dat de betrouwbaarheid voor wat betreft de hypothesen  $H_C$  bij de pseudo LKK-aansluiting beter is dan bij de strenge LKK-aansluiting. Dit komt, omdat bij de pseudo LKK-aansluiting een deel van de vervorming van netwerk (2) niet wordt doorgegeven.

#### 10. Precisie bij aansluiting

De precisie van de coördinaten na aansluiting wordt beschreven door hun covariantiematrix. Deze covariantiematrix wordt verkregen door toepassing van de voortplantingswet der covarianties op de coördinaatberekeningsformules. Voor de LKK-aansluiting zijn deze formules in het tweede artikel [2] afgeleid; zie formules (13) en (63). De coördinaatberekeningsformules voor de pseudo LKK-aansluiting aan netwerk (1) verkrijgt men dan door substitutie van  $Q_s^{(1)} = 0$ .

De precisie van de LKK-aansluiting is uiteraard beter dan die van de pseudo LKK-aansluiting. Immers, zoals aangegeven in het eerste artikel [1] is minimale variantie één van de eigenschappen van de LKK-schatter van schatbare functies. Tevens zal bij LKK-aansluiting de precisie van het puntenveld na aansluiting beter zijn dan vóór de aansluiting.

Bij de pseudo LKK-aansluiting aan netwerk (1) blijft echter de precisie van het eerste netwerk onveranderd, terwijl de precisie van het tweede netwerk beter of slechter wordt, afhankelijk van het feit of de precisie van de aansluitpunten in netwerk (1) beter dan wel slechter is dan de precisie van de aansluitpunten in netwerk (2). Immers, bij pseudo LKK-aansluiting zijn de coördinaten van de aansluitpunten na aansluiting die van netwerk (1) voor aansluiting.

Wat betreft het testen van de precisie na aansluiting kan men dezelfde procedure volgen zoals aangegeven in hoofdstuk 4, dat wil zeggen door de covariantiematrix van de coördinaten via het algemene eigenwaardeprobleem te vergelijken met een criteriummatrix. Ook ten aanzien van het opstellen van een vervangingsmatrix kan men in principe dezelfde weg volgen zoals aangegeven in hoofdstuk 4. Het zal echter duidelijk zijn, dat men in vergelijking met de precisiebeschrijving van een zelfstandig homogeen netwerk meerdere parameters

nodig zal hebben voor de precisiebeschrijving van aangesloten puntenvelden, vooral als het een aansluiting van puntenvelden betreft welke langs geheel verschillende weg tot stand zijn gekomen.

Het probleem van de precisiebeschrijving wordt hierbij vooral bepaald door de relatieve precisie tussen de coördinaten  $x_1$  en  $x_3$  na aansluiting. We zijn nog niet in staat gebleken — een aantal bijzondere aansluitingsproblemen daargelaten — om een goede en tegelijkertijd simpele vervangingsmatrix te construeren voor het algemene aansluitingsprobleem. Het vinden van meer gedifferentieerde vervangingsmatrices, met eenvoudige en realistische schattingsmethoden voor de precisiebeschrijvende parameters en de mogelijkheid van een variabele afstemming op de praktische behoefte, heeft dan ook in het kader van de aansluitingsproblematiek prioriteit.

#### 11. Samenvatting

In dit artikel zijn we ingegaan op de kwaliteitsaspecten van de aansluitingsvereffening. Achtereenvolgens zijn aan de orde gekomen de algemene toetsings-, betrouwbaarheids- en precisietheorie, de toetsing bij aansluiting en de precisie en betrouwbaarheid bij respectievelijk een LKK en pseudo LKK-aansluiting; zie ook [9].

Bij de aansluiting zijn we uitgegaan van drie verschillende klassen van alternatieve hypothesen:  $H_A$ , een modelfout in  $E\{\hat{x}^{(1)}\}$  ten gevolge van een onontdekte fout in netwerk (1);  $H_B$ , een modelfout in de coördinatenvector van de aansluitpunten ten gevolge van bijvoorbeeld een puntidentificatiefout of een affiene deformatie;  $H_C$ , een modelfout in  $E\{\hat{x}^{(2)}\}$  ten gevolge van een onontdekte fout in netwerk (2). De toetsing bij aansluiting kan slechts betrekking hebben op de hypothesen  $H_B$ . Hiervoor hebben we de globale en b-dimensionale toetsgrootheid met bijbehorende inwendige betrouwbaarheid afgeleid. De uitwendige betrouwbaarheid van alle drie de klassen van alternatieve hypothesen hebben we met behulp van de  $\lambda$ -grootheden beschreven, zowel voor de LKK-aansluiting als pseudo LKK-aansluiting. Deze  $\lambda$ -grootheden geven dan samen met de a posteriori precisie van schatbare functies de mogelijkheid om een bovengrens te geven voor de invloed van modelfouten op de onder de nulhypothese berekende schatbare functies.

Met dit derde artikel sluiten we de algemeen theoretische beschouwingen van de aansluitingsproblematiek af. Met behulp van de gepresenteerde theorie zullen in het vierde en laatste artikel praktische voorbeelden worden uitgewerkt voor verschillende toepassingen, waarbij (met enige vereenvoudigingen in het kansmodel) veelal analytische oplossingen kunnen worden gegeven.

#### Literatuur

1. Teunissen, P. J. G., M. A. Salzmans en H. M. de Heus, *Over het aansluiten van puntenvelden (1) — Het rangdefecte lineaire tweede standaardvraagstuk*. NGT Geodesia 1987, no. 5, p. 181-188.
2. Teunissen, P. J. G., M. A. Salzmans en H. M. de Heus, *Over het aansluiten van puntenvelden (2) — De aansluitingsvereffening*. NGT Geodesia 1987, no. 6, p. 229-235 en NGT Geodesia 1987, no. 7/8, p. 270-273.
3. Teunissen, P. J. G., M. A. Salzmans en H. M. de Heus, *Theory of Connecting Geodetic Pointfields, with applications*. TU Delft, in druk, 1987.
9. Werkenheid Mathematische Geodesie en Landmeten, TU Delft, *Syllabus POM — Post-academische Overzichtscursus Mathematische Geodesie*. In druk, 1987.
10. Vaessen, E. M. J., *Enkele aspecten van het blokvereffeningsprogramma FOTEF*. Afstudeerscriptie, Afdeling der Geodesie, Delft, 1983.