

Over het aansluiten van puntenvelden (2):

De aansluitingsvereffening¹⁾

door dr. ir. P. J. G. Teunissen, ir. M. A. Salzmann en ir. H. M. de Heus, Faculteit der Geodesie van de Technische Universiteit Delft.

SUMMARY

On the adjustment for the connection of pointfields

In this article a general method is derived for connecting overlapping pointfields. In particular attention is given to rankdeficiencies in the coordinate covariance matrices. A regularization method for singular covariance matrices is given. It is shown that the linear least-squares estimators of the coordinates and transformation parameters are invariant for the regularization method. No explicit use is made of the theory of generalized inverses. Some numerical examples are given.

1. Inleiding

In het eerste artikel [1]²⁾ is het model van het rangdefecte lineaire tweede standaardvraagstuk uitgebreid behandeld. In [1] hebben we onder andere laten zien, dat het rangdefect van de designmatrix kon worden opgeheven door het introduceren van zgn. gewogen minimumcondities. De eigenschappen van de berekende LKK-schatters, zoals de zuiverheid van de schatters en de rang van hun covariantiematrices, zijn sterk afhankelijk van de gekozen set van gewogen minimumcondities. Bij de zogenaamde aansluitingsvereffening, waarbij men met twee (of meer) coördinaatbestanden te maken heeft, welke in de regel op verschillende coördinaatdefinities zijn gebaseerd, zal men dus terdege rekening moeten houden met de genoemde afhankelijkheid. Men zal bijvoorbeeld rekening moeten houden met eventuele singulariteiten in de covariantiematrices van de coördinaten.

In dit artikel wordt een algemeen aansluitingsmodel voor het aansluiten van twee (of meer) coördinaatbestanden geformuleerd. Er wordt rekening gehouden met een eventueel rangverlies in de covariantiematrices. Twee oplossingsmethoden worden gegeven. De twee methoden verhouden zich tot elkaar zoals het eerste en tweede standaardvraagstuk zich tot elkaar verhouden.

De eerste oplossingsmethode wordt afgeleid door gebruik te maken van de uit de vereffeningstheorie [2] of [3] bekende formule van „x^R-grootheden“. We laten zien hoe eventuele singuliere covariantiematrices kunnen worden geregulariseerd zonder dat dit de LKK-schatters van de coördinaten na aansluiting en de transformatieparameters beïnvloedt. De aansluitingsvereffening (inclusief de genoemde regularisatie) worden aan de hand van een uitgewerkt rekenvoorbeeld geïllustreerd.

De tweede oplossingsmethode leiden we uit de eerste af. Deze alternatieve methode maakt gebruik van S-transformaties, wat voor het meest algemene geval van aansluiting neerkomt op het in principe tweemaal toepassen van de (gelineariseerde) gelijkvormigheidstransformatie. Ook voor deze methode wordt een rekenvoorbeeld gegeven.

¹⁾ Vervolg van de serie artikelen over het aansluiten van puntenvelden. Deel 1 werd geplaatst in het meinummer 1987 van dit tijdschrift.

Dit tweede artikel wordt geplaatst in twee gedeelten. Hieronder volgt eerst een overzicht van de aansluitingsvereffening met een voorbeeld. In het juli/augustusnummer volgt een alternatieve formulering met behulp van S-transformaties.

²⁾ De nummers [1] t.m. [8] verwijzen naar „Literatuur“ op p. 235 aan het eind van dit artikel.

2. Aansluitingsmodel

Veronderstel dat twee elkaar overlappende tweedimensionale netwerken — netwerk (1) en netwerk (2) — onafhankelijk van elkaar gemeten en vereffend zijn. We beschikken dan over de coördinaten (x_i⁽¹⁾, y_i⁽¹⁾), (x_i⁽²⁾, y_i⁽²⁾) i = 1, . . . n met bijbehorende covariantiematrices. Daar de twee coördinaatbestanden een verschillende coördinaatdefinitie kunnen hebben (d.w.z. verschillende gewogen minimumcondities [1]), zal in het algemeen voor de verwachtingswaarden gelden dat:

$$(1) \quad E \left\{ \begin{pmatrix} x_i^{(1)} \\ y_i^{(1)} \end{pmatrix} \right\} = \lambda \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} E \left\{ \begin{pmatrix} x_i^{(2)} \\ y_i^{(2)} \end{pmatrix} \right\} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$

Met andere woorden, de twee puntenvelden worden verondersteld gelijkvormig aan elkaar te zijn. We nemen model (1) als uitgangspunt voor onze aansluitingsvereffening. Daar het model niet-lineair is, zullen we het eerst moeten lineariseren. Linearisatie van (1) geeft dan:

$$(2) \quad E \left\{ \begin{pmatrix} \Delta x_i^{(1)} \\ \Delta y_i^{(1)} \end{pmatrix} \right\} = E \left\{ \begin{pmatrix} \Delta x_i^{(2)} \\ \Delta y_i^{(2)} \end{pmatrix} \right\} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_i^0 & y_i^0 \\ 0 & 1 & y_i^0 & -x_i^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t_x \\ \Delta t_y \\ \Delta \lambda \end{pmatrix}$$

Hierbij hebben we voor de eenvoud aangenomen, dat voor de benaderde waarden van schaal en rotatie de waarden λ⁰ = 1 en α⁰ = 0 mogen worden genomen. Deze keuze zal voor de meeste praktische toepassingen voldoende goed zijn. Is deze keuze van de benaderde waarden niet toereikend, dan zal men betere waarden moeten berekenen en/of meerdere iteraties van de gelineariseerde vereffening moeten uitvoeren. Voor meer informatie betreffende de berekening van benaderde waarden en keuze van iteratiemethoden: [4]. In vectornotatie kunnen we (2) schrijven als:

$$(3) \quad E \{ \hat{x}^{(1)} \} = E \{ \hat{x}^{(2)} \} + v^L t$$

waarbij

$$\hat{x}^{(1)} = (\dots, \Delta x_i^{(1)}, \Delta y_i^{(1)}, \dots)^*, \quad \hat{x}^{(2)} = (\dots, \Delta x_i^{(2)}, \Delta y_i^{(2)}, \dots)^*$$

$$t = (\Delta t_x, \Delta t_y, \Delta \lambda, \Delta \alpha)^* \text{ en}$$

$$v^L = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & x_i^0 & y_i^0 \\ 0 & 1 & y_i^0 & -x_i^0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Hebben we te maken met twee driedimensionale netwerken, zoals bijvoorbeeld bij de aansluiting van satellietnetwerken [5], [6], [7], [8], dan volgt het lineaire verband (3) uit de linearisering van de driedimensionale gelijkvormigheidstransformatie.

Hanteren we de volgende notatie voor de partitionering van de vectoren x⁽¹⁾ en x⁽²⁾ (fig. 1):

- x_1 : n_1 -vector van coördinaatincrementen van de vrije punten in netwerk (1).
- x_2 : n_2 -vector van coördinaatincrementen van de aansluitingspunten.
- x_3 : n_3 -vector van de coördinaatincrementen van de vrije punten in netwerk (2).

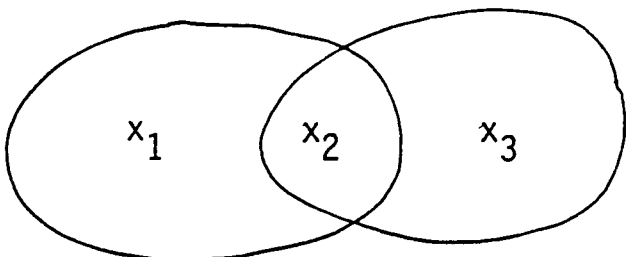


Fig. 1. Overlappende puntenvelden.

dan kunnen we uitgaande van (3) het gelineariseerde model voor de aansluitingsvereffening formuleren als:

$$(4) \quad E \begin{Bmatrix} \hat{x}_1^{(1)} \\ \hat{x}_2^{(1)} \\ \hat{x}_2^{(2)} \\ \hat{x}_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & & & \\ & I & & \\ & & I & V_2^T \\ & & & I & V_3^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ t \end{Bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0_{11}^{(1)} & 0_{12}^{(1)} & & 0 \\ 0_{21}^{(1)} & 0_{22}^{(1)} & & \\ & & 0_{22}^{(2)} & 0_{23}^{(2)} \\ 0 & & 0_{32}^{(2)} & 0_{33}^{(2)} \end{bmatrix}$$

Merk op dat we er hierbij van zijn uitgegaan, dat we de coördinaten na aansluiting in het coördinatenstelsel van het eerste netwerk wensen te krijgen. Willen we nu het LKK-algoritme op het lineaire model (4) gaan toepassen, dan zullen we de covariantiematrices of delen daarvan moeten invertieren. Dit is echter niet altijd mogelijk. We weten immers [1], dat de covariantiematrix van de LKK-schatter \hat{x} dan en slechts dan inverteerbaar is als de covariantiematrix Q_c van de gekozen gewogen minimumcondities positief definitief is. In alle andere gevallen zal de covariantiematrix van de LKK-schatter \hat{x} in het rangdefecte lineaire model singulier en dus niet inverteerbaar zijn. Het eventuele rangdefect in de covariantiematrices van (4) is dus een gevolg van het rangdefect in de designmatrices met behulp waarvan de twee netwerken afzonderlijk zijn verreffend. Hoe kunnen we nu het rangdefect in de covariantiematrices opheffen? In hoofdstuk 4 zullen we laten zien, dat we de covariantiematrices van (4) op een bepaalde manier mogen *regulariseren* zonder dat dit de LKK-schatter van \hat{x} in model (4) beïnvloedt. We nemen daarom alvast aan, dat de covariantiematrices van (4) regulier en dus inverteerbaar zijn.

3. LKK-oplossing van de aansluitingsvereffening

De LKK-schatters van $E\{\hat{x}_2^{(1)}\}$ en $E\{\hat{x}_2^{(2)}\}$ worden uitsluitend bepaald door de coördinaten $\hat{x}_2^{(1)}$ en $\hat{x}_2^{(2)}$ van de aansluitpunten. Zij zijn dus niet afhankelijk van de coördinaten $\hat{x}_1^{(1)}$ en $\hat{x}_3^{(2)}$ van de vrije punten in beide netwerken. Dit betekent, dat we ons voor de bepaling van de schatters $E\{\hat{x}_2^{(1)}\}$ en $E\{\hat{x}_2^{(2)}\}$ kunnen beperken tot het deelmodel:

$$(5) \quad E \begin{Bmatrix} \hat{x}_2^{(1)} \\ \hat{x}_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & V_2^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_2 \\ t \end{Bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0_{22}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0_{22}^{(2)} \end{bmatrix}$$

De coördinaten van de vrije punten in beide netwerken zijn nu te interpreteren als zgn. „ x^R -grootheden“. Zij krijgen een LKK-correctie afhankelijk van hun correlatie met respectievelijk $\hat{x}_2^{(1)}$ en $\hat{x}_2^{(2)}$.

Hoewel deelmodel (5) al gemakkelijker is te hanteren dan het lineaire model (4), kunnen we nog een stap verder gaan door de *verschilvector* d van $\hat{x}_2^{(1)}$ en $\hat{x}_2^{(2)}$ te beschouwen. We definiëren:

$$(6) \quad d = \hat{x}_2^{(1)} - \hat{x}_2^{(2)}; \quad Q_d = 0_{22}^{(1)} + 0_{22}^{(2)}$$

Uit (5) volgt, dat de LKK-schatter \hat{t} van de transformatievector t uitsluitend bepaald wordt door de verschilvector d . Dit betekent, dat we ons voor de bepaling van \hat{t} kunnen beperken tot het eenvoudige deelmodel:

$$(7) \quad E\{\hat{t}\} = -V_2^T t; \quad Q_d$$

Met betrekking tot dit model zijn nu *alle* coördinaten $\hat{x}_1^{(1)}$, $\hat{x}_2^{(1)}$, $\hat{x}_2^{(2)}$ en $\hat{x}_3^{(2)}$ „ x^R -grootheden“ geworden. Zodra de LKK-residuenvector van d bekend is, kan men de LKK-correcties van de coördinaten met behulp van de uit de vereffeningstheorie [2] bekende formule van de „ x^R -grootheden“ berekenen. Deze formule luidt respectievelijk in de zgn. index-, Tienstra- en mathematisch-statistische notatie:

- a) $\hat{\epsilon}^R = g^{Rj} g_{j1} \epsilon^1$
- b) $\hat{\epsilon}^R = \frac{1}{x^R x^{R^*}} \frac{1}{x^1 x^{1^*}} \epsilon^1$
- c) $\hat{\epsilon}^R = E\{(x^R - E(x^R))(x^j - E(x^j))^*\} [E\{(x^1 - E(x^1))(x^j - E(x^j))^*\}]^{-1} \epsilon^1$

We zullen in het vervolg de Tienstra-notatie aanhouden.

Het deelmodel (7) is geformuleerd als een tweede standaardvraagstuk. De designmatrix $-V_2^T$ heeft volle rang. De rang van de covariantiematrix Q_d hangt af van de rangen van de twee covariantiematrices $Q_{22}^{(1)}$ en $Q_{22}^{(2)}$. We nemen voorlopig even aan, dat Q_d volle rang heeft en dus inverteerbaar is. Toepassing van het LKK-algoritme van het tweede standaardvraagstuk op (7) geeft dan voor de LKK-schatters van respectievelijk t , d en de residuenvector van d :

- a) $\hat{t} = -(V_2^T Q_d^{-1} V_2^T)^{-1} V_2^T Q_d^{-1} d$
- b) $\hat{d} = -V_2^T \hat{t}$
- c) $\hat{\epsilon}_d = \hat{d} - d = -(I - V_2^T (V_2^T Q_d^{-1} V_2^T)^{-1} V_2^T Q_d^{-1}) d$

Met behulp van de LKK-residuenvector $\hat{\epsilon}_d$ en formule (8b) kunnen de LKK-correcties aan de coördinaten worden berekend als:

$$(10) \quad \begin{aligned} \hat{\epsilon}_{\hat{x}_1^{(1)}} &= \frac{\hat{x}_1^{(1)}, d^*}{\hat{x}_1^{(1)}, d^*} \hat{\epsilon}_d \\ \hat{\epsilon}_{\hat{x}_2^{(1)}} &= \frac{\hat{x}_2^{(1)}, d^*}{\hat{x}_2^{(1)}, d^*} \hat{\epsilon}_d \\ \hat{\epsilon}_{\hat{x}_2^{(2)}} &= \frac{\hat{x}_2^{(2)}, d^*}{\hat{x}_2^{(2)}, d^*} \hat{\epsilon}_d \\ \hat{\epsilon}_{\hat{x}_3^{(2)}} &= \frac{\hat{x}_3^{(2)}, d^*}{\hat{x}_3^{(2)}, d^*} \hat{\epsilon}_d \end{aligned}$$

De LKK-schatters van de onbekende coördinaten \hat{x}_1 , \hat{x}_2 en \hat{x}_3 van model (4) worden dan berekend als:

$$(11) \quad \begin{aligned} \hat{x}_1 &= \hat{x}_1^{(1)} + \hat{\epsilon}_{\hat{x}_1^{(1)}} \\ \hat{x}_2 &= \hat{x}_2^{(1)} + \hat{\epsilon}_{\hat{x}_2^{(1)}} \\ \hat{x}_2 &= \hat{x}_2^{(2)} + \hat{\epsilon}_{\hat{x}_2^{(2)}} - V_2^T \hat{t} \\ \hat{x}_3 &= \hat{x}_3^{(2)} + \hat{\epsilon}_{\hat{x}_3^{(2)}} - V_3^T \hat{t} \end{aligned}$$

Merk op dat $\hat{x}_2 + V_2^T \hat{t}$ en $\hat{x}_3 + V_3^T \hat{t}$ de LKK-schatters van respectievelijk $E\{\hat{x}_2^{(2)}\}$ en $E\{\hat{x}_3^{(2)}\}$ zijn. Dus de LKK-schatters van \hat{x}_2 en \hat{x}_3 worden verkregen door de LKK-schatters van $E\{\hat{x}_2^{(2)}\}$ en $E\{\hat{x}_3^{(2)}\}$ met behulp van de transformatievector \hat{t} na te transformeren. De LKK-schatters van $E\{\hat{x}_2^{(2)}\}$ en $E\{\hat{x}_3^{(2)}\}$ zijn immers nog in het coördinatenstelsel van het tweede netwerk gedefinieerd.

Door na te gaan hoe de uit de twee afzonderlijke vereffeningen verkregen coördinaatschatters met de verschilvector d correleren, kunnen we door samenvoeging van de formules (9), (10) en (11) de uiteindelijke LKK-oplossing van de aansluitingsvereffening berekenen. Daar

$$(12) \quad \begin{aligned} \overline{d, d^*} &= Q_d; \quad \overline{\hat{x}_1^{(1)}, d^*} = 0_{12}^{(1)}; \quad \overline{\hat{x}_2^{(1)}, d^*} = 0_{22}^{(1)}; \\ \overline{\hat{x}_2^{(2)}, d^*} &= -0_{22}^{(2)}; \quad \overline{\hat{x}_3^{(2)}, d^*} = -0_{32}^{(2)}, \end{aligned}$$

volgt tenslotte uit (9), (10) en (11) dat:

$$\begin{aligned}
 & \text{a) } \hat{\epsilon} = -(V_2^L Q_d^{-1} V_2^L)^{-1} V_2^L Q_d^{-1} d \\
 & \text{b) } \hat{d} = -V_2^L \hat{\epsilon} \\
 & \text{c) } \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1^{(1)} \\ \hat{x}_2^{(1)} \\ \hat{x}_3^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -Q_{12}^{(1)} \\ -Q_{22}^{(1)} \\ Q_{32}^{(2)} \end{pmatrix} Q_d^{-1} (d - \hat{d}) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -V_2^L \\ -V_3^L \end{pmatrix} \hat{\epsilon}
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Bij het gebruik van formule (13) voor de aansluitingsvereffening is de rekengang dus de volgende:

- Men stelt de verschilvector d met bijbehorende covariantiematrix Q_d op.
- Na inversie van Q_d (eventueel na regularisatie, zie hoofdstuk 4) berekent men met behulp van (13a) de LKK-schatter van de transformatievector t .
- De LKK-correcties van de coördinaten van beide netwerken worden berekend op grond van het verschil $d - \hat{d}$.
- De vereffende coördinaten van netwerk (2) worden vervolgens met behulp van de transformatievector \hat{t} getransformeerd om tenslotte coördinaten in het coördinatenstelsel van het eerste netwerk te krijgen.

4. Regularisatie van Q_d

We hadden al opgemerkt, dat in het algemeen de covariantiematrices van de coördinaten singulier en dus niet inverteerbaar zijn. Nu is oplossing (13) pas te gebruiken als Q_d regulier is. Wat te doen als Q_d singulier is? We zullen laten zien, dat we een singuliere Q_d *altijd* op een bepaalde manier kunnen *regulariseren* zonder dat dit de LKK-schatters van (13) beïnvloedt. Daartoe bewijzen we dat zowel $Q_d^{-1} (d - \hat{d})$ als \hat{t} *invariant* zijn onder de genoemde regularisatie.

Eerst bewijzen we dat:

$$\begin{aligned}
 & \text{a) } Q_d^{-1} (d - \hat{d}) = V_2 (V_2^L Q_d V_2^L)^{-1} V_2^L d \\
 & \text{b) } \hat{\epsilon} = -(V_2^L V_2^L)^{-1} V_2^L (I - Q_d V_2 (V_2^L Q_d V_2^L)^{-1} V_2^L) d
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

waarbij matrix V_2 een basismatrix is van de nulruimte $N(V_2^L)$. Uit de vereffeningstheorie weten we, dat er twee standaardformuleringen van het vereffeningmodel bestaan, namelijk *het eerste en het tweede standaardvraagstuk*. Beide geven identieke resultaten. Model (7) is als een tweede standaardvraagstuk geformuleerd. Om de eerste standaardvraagstukformulering van (7) te verkrijgen, vermenigvuldigen we (7) voor met de basismatrix V_2^L . Daar $V_2^L V_2^L = 0$, volgt dat

$$V_2^L \epsilon \{d\} = 0; \quad Q_d
 \tag{15}$$

Toepassing van het LKK-algoritme van het eerste standaardvraagstuk op (15) geeft dan voor \hat{d} en $\hat{\epsilon}_d$

$$\begin{aligned}
 & \text{a) } \hat{d} = (I - Q_d V_2 (V_2^L Q_d V_2^L)^{-1} V_2^L) d \\
 & \text{b) } \hat{\epsilon}_d = \hat{d} - d = -Q_d V_2 (V_2^L Q_d V_2^L)^{-1} V_2^L d
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Voorvermenigvuldigen van (16b) met Q_d^{-1} geeft dan (14a).

Uit (13b) volgt dat

$$\hat{\epsilon} = -(V_2^L V_2^L)^{-1} V_2^L \hat{\epsilon}_d
 \tag{17}$$

Substitutie van (16a) in (17) geeft dan (14b).

Nu merken we op, dat $V_2^L V_2^L = 0$, dat

$$(Q_d + V_2^L Q_d V_2^L) V_2 = Q_d V_2
 \tag{18}$$

voor iedere keuze van Q_d .

Dit betekent, dat we bij de berekening van (14a) en (14b) in plaats van Q_d ook gebruik mogen maken van de som $Q_d + V_2^L Q_d V_2^L$; (14) is dus invariant voor de additionele term $V_2^L Q_d V_2^L$. Bij de aansluitingsvereffening mag men daarom altijd voor Q_d de matrix

$$Q_d = Q_{22}^{(1)} + Q_{22}^{(2)} + V_2^L Q_d V_2^L
 \tag{19}$$

nemen.

Nu weten we [1], dat de covariantiematrix $Q_x + V^L Q_t V^{L*}$ van de coördinaten regulier is, als Q_t positief definitief wordt gekozen. Dit betekent, dat de covariantiematrix Q_d van (19) regulier en dus inverteerbaar is, als Q_t positief definitief (bijvoorbeeld $Q_t = I$) wordt gekozen. We kunnen dus altijd een eventuele singuliere Q_d met behulp van de additionele term $V_2^L Q_d V_2^L$ regulariseren, zonder dat de oplossing (13) hierdoor verandert.

Is de som $Q_{22}^{(1)} + Q_{22}^{(2)}$ zelf al regulier, dan wordt in (19) $Q_t = 0$ gekozen.

5. Invariantie van $(\hat{x}_1^* \hat{x}_2^* \hat{x}_3^*)^*$

In onze formulering (4) van het lineaire model van de aansluitingsvereffening zijn we ervan uitgegaan, dat we de coördinaten na aansluiting in het coördinatenstelsel van het eerste netwerk wensen te krijgen. Dit betekent, dat de LKK-schatter van de coördinatenbekenden $(x_1^* x_2^* x_3^*)^*$ onafhankelijk moet zijn van de in het tweede netwerk gekozen gewogen minimumcondities. Dit blijkt echter niet direct uit formule (13). Als we immers in het tweede netwerk op een andere set van gewogen minimumcondities overgaan, zullen zowel de coördinaten-schatter $\hat{x}^{(2)}$, de covariantiematrix $Q_x^{(2)}$, als de transformatievector \hat{t} veranderen.

In [1] hebben we laten zien, dat we elke LKK-schatter \hat{x} van het rangdefecte lineaire model kunnen schrijven als:

$$\begin{aligned}
 & \text{a) } \hat{x} = \hat{x}_0 + V^L t \\
 & \text{b) } Q_x = Q_{x_0} + Q_{x_0 t} V^{L*} + V^L Q_{t x_0} + V^L Q_t V^{L*}
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

waarbij \hat{x}_0 een particuliere oplossing is van de normaalvergelijkingen. We zullen nu de afhankelijkheid van oplossing (13) van de additionele termen in (20) onderzoeken.

Stel dat we in het *tweede* netwerk op een ander stel van gewogen minimumcondities overgaan, d.w.z. we gaan over op een andere coördinaatdefinitie. Geven we de bij de nieuwe coördinaatdefinitie behorende schatters aan met een accent, dan geldt volgens (20):

$$\begin{aligned}
 & \text{a) } \hat{x}_2^{(2)'} = \hat{x}_2^{(2)} + V_2^L t \\
 & \text{b) } \hat{x}_3^{(2)'} = \hat{x}_3^{(2)} + V_3^L t \\
 & \text{c) } Q_{22}^{(2)'} = Q_{22}^{(2)} + Q_{x_2 t} V_2^{L*} + V_2^L Q_{t x_2} + V_2^L Q_t V_2^{L*} \\
 & \text{d) } Q_{32}^{(2)'} = Q_{32}^{(2)} + Q_{x_3 t} V_2^{L*} + V_3^L Q_{t x_2} + V_3^L Q_t V_2^{L*}
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

1°. De afhankelijkheid van \hat{t}

Uit (16a) volgt dat

$$\hat{d} = d - Q_d V_2 (V_2^L Q_d V_2^L)^{-1} V_2^L d
 \tag{22}$$

Vervangen we volgens (21) d en Q_d door respectievelijk:

$$\begin{aligned}
 & \text{a) } d' = d - V_2^L t \\
 & \text{b) } Q_d' = Q_d + Q_{x_2 t} V_2^{L*} + V_2^L Q_{t x_2} + V_2^L Q_t V_2^{L*}
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

dan transformeert, daar $V_2^L V_2^L = 0$, \hat{d} naar \hat{d}' , als:

$$\hat{d}' = \hat{d} - V_2^L t - V_2^L Q_{t x_2} V_2 (V_2^L Q_d V_2^L)^{-1} V_2^L d
 \tag{24}$$

Met (14a) is dit ook te schrijven als:

$$\hat{d}' = \hat{d} - V_2^L t - V_2^L Q_{t x_2} Q_d^{-1} (d - \hat{d})
 \tag{25}$$

Met (17) en (25) volgt dan, dat bij overgang op een nieuwe coördinaatdefinitie \hat{t} naar \hat{t}' transformeert als:

$$\hat{t}' = \hat{t} + t + Q_{t x_2} Q_d^{-1} (d - \hat{d})
 \tag{26}$$

2°. De afhankelijkheid van $Q_d^{-1} (d - \hat{d})$

Daar volgens (14a)

$$(27) \quad Q_d^{-1}(d - \hat{d}) = L_2 (L_2^{-1} L_2)^{-1} V_2^* d$$

volgt, omdat $V_2^* V_2 = 0$, dat $Q_d^{-1}(d - \hat{d})$ onafhankelijk is van de additionele termen welke in (21) optreden. Met andere woorden, (27) is onafhankelijk van de in beide netwerken gekozen coördinaatdefinities.

Een andere manier om dit in te zien, is de volgende. Stel dat matrix A de rangdefecte designmatrix is van het tweede netwerk. Dan is $AV^L = 0$ of in gepartitioneerde vorm

$$(28) \quad (A_2 \ A_3) \begin{pmatrix} \hat{r}_2 \\ \hat{r}_3 \end{pmatrix} = 0$$

Daar V een basismatrix is van $N(V^L)^*$, geldt

$$(29) \quad R(A^*) = R(A)$$

Uit

$$(30) \quad (V_2^* \ 0) \begin{pmatrix} \hat{r}_2 \\ \hat{r}_3 \end{pmatrix} = 0$$

volgt dan, dat de kolommen van de matrix $(V_2^* \ 0)^*$ in de kolomruimte $R(V) = R(A^*)$ liggen, maar dit betekent [1] dat de lineaire functies $V_2^* x_2$ en $V_2^* E\{d\}$ schatbaar zijn en dus onafhankelijk van de gekozen gewogen minimumcondities.

3°. De afhankelijkheid van $(\hat{x}_2^* \ \hat{x}_3^*)^*$

Met de nieuwe coördinaatdefinitie in het tweede netwerk wordt de tweede set van vergelijkingen van (13c):

$$(31) \quad \begin{pmatrix} x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2^{(2)*} \\ x_3^{(2)*} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -22 \\ -32 \end{pmatrix} Q_d^{-1}(d - \hat{d}) + \begin{pmatrix} -v_2^L \\ -v_3^L \end{pmatrix} \hat{c}$$

We zullen laten zien dat

$$(32) \quad \begin{pmatrix} x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Uit (21 a&b) volgt dat

$$(33) \quad \begin{pmatrix} x_2^{(2)*} \\ x_3^{(2)*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{r}_2 \\ \hat{r}_3 \end{pmatrix} t$$

Met (21 c&d), (27) en $V_2^{L*} V_2 = 0$ volgt dat:

$$(34) \quad \begin{pmatrix} Q_{22}^{(2)*} \\ Q_{32}^{(2)*} \end{pmatrix} Q_d^{-1}(d - \hat{d}) = \begin{pmatrix} -22 \\ -32 \end{pmatrix} Q_d^{-1}(d - \hat{d}) + \begin{pmatrix} v_2^L \\ v_3^L \end{pmatrix} Q_{tx_2} Q_d^{-1}(d - \hat{d})$$

en met (26) volgt dat:

$$(35) \quad \begin{pmatrix} -v_2^L \\ -v_3^L \end{pmatrix} \hat{c} = \begin{pmatrix} -\hat{r}_2 \\ -\hat{r}_3 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} v_2^L \\ v_3^L \end{pmatrix} Q_{tx_2} Q_d^{-1}(d - \hat{d})$$

Substitutie van (33), (34) en (35) in (31) geeft dan ten slotte (32).

Dus $(\hat{x}_2^* \ \hat{x}_3^*)^*$ is inderdaad onafhankelijk van de gekozen gewogen minimumcondities van het tweede netwerk. Omdat $(\hat{x}_1^* \ \hat{x}_2^*)^*$ dit ook is, is dus de gehele oplossing (13c) onafhankelijk van de in netwerk (2) gekozen coördinaatdefinitie.

6. Voorbeeld: waterpasnetwerk

Om het een en ander te verduidelijken, zullen we twee eenvoudige waterpasnetwerkjes met verschillende coördinaatdefinities aansluiten.

Netwerk (1) en (2)

Het eerste waterpasnetwerkje bestaat uit de drie punten 1, 2, en 2', en het tweede uit de drie punten 3, 2, 2' (fig. 2).

De punten 2 en 2' zijn de aansluitpunten. De twee lineaire modellen op grond waarvan de twee waterpasnetwerkjes afzonderlijk worden vereffend, luiden:

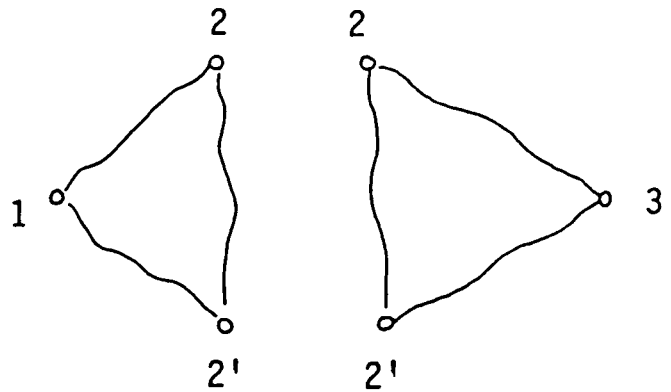


Fig. 2. Het aansluiten van twee waterpasnetwerken.

$$(36) \quad E \begin{pmatrix} h_1^{(1)} \\ h_2^{(1)} \\ h_2^{(1)} \\ h_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^{(1)} \\ h_2^{(1)} \\ h_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

en

$$(37) \quad E \begin{pmatrix} h_1^{(2)} \\ h_2^{(2)} \\ h_2^{(2)} \\ h_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^{(2)} \\ h_2^{(2)} \\ h_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

De designmatrices van beide netwerken zijn singulier en de basismatrix V^L , welke de nulruimte van de designmatrices opspant, luidt:

$$(38) \quad V^L = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

We nemen aan, dat de covariantiematrix van de gemeenten hoogteverschillen voor beide netwerken een eenheidsmatrix is. De singuliere normaalmatrices zijn voor beide modellen gelijk en worden gegeven door:

$$(39) \quad A^* A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Coördinaatdefinitie

NETWERK (1)

Voor netwerk (1) beschouwen we drie verschillende coördinaatdefinities.

1. De hoogte $h_1^{(1)}$ van punt 1 wordt gesteld op de waarde c met een fictieve variantie van $Q_c = 10$.
2. De hoogte $h_2^{(1)}$ van punt 2' wordt vastgeprikt op de waarde 0, d.w.z. deze minimumconditie wordt oneindig gewogen.
3. De hoogte $h_2^{(1)}$ van punt 2 wordt vastgeprikt op de waarde 0.

NETWERK (2)

Voor het tweede netwerk beschouwen we twee verschillende coördinaatdefinities.

1. De hoogte $h_3^{(2)}$ van punt 3 wordt vastgeprikt op de waarde 0.
2. De hoogte $h_2^{(2)}$ van punt 2 wordt vastgeprikt op de waarde c = 5.

Vrije LKK-vereffening

We weten [1], dat de oplossing van het rangdefecte lineaire model met gewogen minimumcondities

$$(40) \quad E \begin{pmatrix} y \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ S^L \end{pmatrix} x; \begin{pmatrix} Q_y & 0 \\ 0 & Q_c \end{pmatrix}$$

wordt gegeven door

$$(41) \quad \hat{x} = S[(AS)^* Q_y^{-1} (AS)]^{-1} (AS)^* Q_y^{-1} y + V^L [S^L (S^L)^* V^L]^{-1} c$$

$$Q_{\hat{x}} = S[(AS)^* Q_y^{-1} (AS)]^{-1} S^* + V^L [S^L (S^L)^* V^L]^{-1} Q_c [V^L (S^L)^* V^L]^{-1} V^L$$

De afzonderlijke vereffening van de twee waterpasnetwerkjes met de verschillende coördinaatdefinities is in tabel 1 in stappen uitgevoerd. We zien dat de schatters

$\hat{x}^{(1)}$ en $\hat{x}^{(2)}$, en de covariantiematrices $Q_{\hat{x}}^{(1)}$ en $Q_{\hat{x}}^{(2)}$ sterk afhangen van de gekozen coördinaatdefinitie. De covariantiematrix $Q_{\hat{x}}^{(1)}$ van het eerste netwerk behorend bij de

	coördinaatdefinities				
	netwerk (1)			netwerk (2)	
	1)	2)	3)	1)	2)
$V^L = (1 \ 1 \ 1)$	$h_1^{(1)} = c$ $Q_c = 10$	$h_2^{(1)} = 0$ $Q_c = 0$	$h_2^{(1)} = 0$ $Q_c = 0$	$h_3^{(2)} = 0$ $Q_c = 0$	$h_2^{(2)} = 5$ $Q_c = 0$
S^L	$(1 \ 0 \ 0)$	$(0 \ 1 \ 0)$	$(0 \ 0 \ 1)$	$(1 \ 0 \ 0)$	$(0 \ 0 \ 1)$
S^*	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
$(V^L[S^L V^L]^{-1})^*$	$(1 \ 1 \ 1)$	$(1 \ 1 \ 1)$	$(1 \ 1 \ 1)$	$(1 \ 1 \ 1)$	$(1 \ 1 \ 1)$
$(V^L[S^L V^L]^{-1}c)^*$	$(c \ c \ c)$	$(0 \ 0 \ 0)$	$(0 \ 0 \ 0)$	$(0 \ 0 \ 0)$	$(5 \ 5 \ 5)$
$[S^* A^* AS]$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
$[S^* A^* AS]^{-1}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
$S[S^* A^* AS]^{-1}S^*$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$V^L[S^L V^L]^{-1}Q_c[V^L S^L]^{-1}V^L$	$\begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$S[S^* A^* AS]^{-1}S^* A^*$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$S[S^* A^* AS]^{-1}S^* A^* y$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 2h_{12}^{(1)} - h_{2,2}^{(1)} - h_{21}^{(1)} \\ h_{12}^{(1)} + h_{2,2}^{(1)} - 2h_{21}^{(1)} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2h_{12}^{(1)} + h_{2,2}^{(1)} + h_{21}^{(1)} \\ 0 \\ -h_{12}^{(1)} + 2h_{2,2}^{(1)} - h_{21}^{(1)} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -h_{12}^{(1)} - h_{2,2}^{(1)} + 2h_{21}^{(1)} \\ h_{12}^{(1)} - 2h_{2,2}^{(1)} + h_{21}^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 2h_{32}^{(2)} - h_{2,2}^{(2)} - h_{23}^{(2)} \\ h_{32}^{(2)} + h_{2,2}^{(2)} - 2h_{23}^{(2)} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -h_{32}^{(2)} - h_{2,2}^{(2)} + 2h_{23}^{(2)} \\ h_{32}^{(2)} - 2h_{2,2}^{(2)} + h_{23}^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix}$
$\hat{x}^{(1)}, \hat{x}^{(2)}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3c \\ 2h_{12}^{(1)} - h_{2,2}^{(1)} - h_{21}^{(1)} + 3c \\ h_{12}^{(1)} + h_{2,2}^{(1)} - 2h_{21}^{(1)} + 3c \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2h_{12}^{(1)} + h_{2,2}^{(1)} + h_{21}^{(1)} \\ 0 \\ -h_{12}^{(1)} + 2h_{2,2}^{(1)} - h_{21}^{(1)} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -h_{12}^{(1)} - h_{2,2}^{(1)} + 2h_{21}^{(1)} \\ h_{12}^{(1)} - 2h_{2,2}^{(1)} + h_{21}^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 2h_{32}^{(2)} - h_{2,2}^{(2)} - h_{23}^{(2)} \\ h_{32}^{(2)} + h_{2,2}^{(2)} - 2h_{23}^{(2)} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -h_{32}^{(2)} - h_{2,2}^{(2)} + 2h_{23}^{(2)} + 15 \\ h_{32}^{(2)} - 2h_{2,2}^{(2)} + h_{23}^{(2)} + 15 \\ 15 \end{pmatrix}$
$Q_{\hat{x}}^{(1)}, Q_{\hat{x}}^{(2)}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 30 & 30 & 30 \\ 30 & 32 & 31 \\ 30 & 31 & 32 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$Q_{22}^{(1)}, Q_{22}^{(2)}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 32 & 31 \\ 31 & 32 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\hat{x}_2^{(1)}, \hat{x}_2^{(2)}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2h_{12}^{(1)} - h_{2,2}^{(1)} - h_{21}^{(1)} + 3c \\ h_{12}^{(1)} + h_{2,2}^{(1)} - 2h_{21}^{(1)} + 3c \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -h_{12}^{(1)} + 2h_{2,2}^{(1)} - h_{21}^{(1)} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} h_{12}^{(1)} - 2h_{2,2}^{(1)} + h_{21}^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2h_{32}^{(2)} - h_{2,2}^{(2)} - h_{23}^{(2)} \\ h_{32}^{(2)} + h_{2,2}^{(2)} - 2h_{23}^{(2)} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} h_{32}^{(2)} - 2h_{2,2}^{(2)} + h_{23}^{(2)} + 15 \\ 15 \end{pmatrix}$

Tabel 1. Vereffening van twee waterpasnetwerken voor vijf verschillende keuzen voor de coördinaatdefinitie.

eerste coördinaatdefinitie is regulier, omdat de hoogte $h_1^{(1)}$ met een fictieve variantie $Q_c = 10$ gewogen is. De vier andere covariantiematrices zijn singulier, omdat de bijbehorende minimumcondities een oneindig gewicht hebben meegekregen.

Verschilvector d en matrix Q_d

De aansluitpunten zijn 2 en 2'. De verschilvector $d = \hat{x}_2^{(1)} - \hat{x}_2^{(2)}$ van de coördinaten van de aansluitpunten en de covariantiematrix Q_d zijn afhankelijk van de in beide netwerken gekozen coördinaatdefinities. We beschouwen de volgende vier gevallen:

1. Aansluiting van netwerk (1) met $h_1^{(1)} = c$ en $Q_c = 10$, aan netwerk (2) met $h_3^{(2)}$ vastgeprikt op de waarde 0. Uit tabel 1 volgt voor de verschilvector d :

$$(42) \quad d = \hat{x}_2^{(1)} - \hat{x}_2^{(2)} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3h_{12}^{(1)} - 3h_{32}^{(2)} + s^{(2)} - s^{(1)} + 3c \\ -3h_{21}^{(1)} + 3h_{23}^{(2)} - s^{(2)} + s^{(1)} + 3c \end{pmatrix}$$

waarbij s voor de sluittermen staat. Dus

$$(43) \quad \begin{aligned} s^{(1)} &= h_{12}^{(1)} + h_{21}^{(1)} + h_{23}^{(1)} \\ s^{(2)} &= h_{32}^{(2)} + h_{23}^{(2)} + h_{21}^{(2)} \end{aligned}$$

Voor de covariantiematrix Q_d krijgen we

$$(44) \quad Q_d = Q_{22}^{(1)} + Q_{22}^{(2)} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 32 & 31 \\ 31 & 32 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 34 & 32 \\ 32 & 34 \end{pmatrix}$$

Zowel $Q_{22}^{(1)}$ en $Q_{22}^{(2)}$ als de som Q_d zijn regulier.

2. Aansluiting van netwerk (1) met $h_1^{(1)} = c$ en $Q_c = 10$

aan netwerk (2) met $h_2^{(2)}$ vastgeprikt op de waarde 5. Uit tabel 1 volgt dat

$$(45) \quad d = \hat{x}_2^{(1)} - \hat{x}_2^{(2)} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3h_{12}^{(1)} + 3h_{22}^{(2)} - s^{(2)} - s^{(1)} + 3c - 15 \\ -3h_{21}^{(1)} + s^{(1)} + 3c - 15 \end{pmatrix}$$

en

$$(46) \quad Q_d = Q_{22}^{(1)} + Q_{22}^{(2)} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 32 & 31 \\ 31 & 32 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 34 & 31 \\ 31 & 32 \end{pmatrix}$$

Matrix $Q_{22}^{(1)}$ is regulier, maar matrix $Q_{22}^{(2)}$ is singulier. De som van beide matrices is echter regulier.

3. Aansluiting van netwerk (1) met $h_2^{(1)}$ vastgeprikt op de waarde 0, aan netwerk (2) met $h_2^{(2)}$ vastgeprikt op de waarde 5. Uit tabel 1 volgt dat

$$(47) \quad d = \hat{x}_2^{(1)} - \hat{x}_2^{(2)} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3h_{22}^{(1)} - s^{(2)} - 15 \\ 3h_{21}^{(1)} - s^{(1)} - 15 \end{pmatrix}$$

en

$$(48) \quad Q_d = Q_{22}^{(1)} + Q_{22}^{(2)} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Nu zijn zowel $Q_{22}^{(1)}$ als $Q_{22}^{(2)}$ singulier. De som Q_d is echter regulier.

4. Aansluiting van netwerk (1) met $h_2^{(1)}$ vastgeprikt op de waarde 0 aan netwerk (2) met $h_2^{(2)}$ vastgeprikt op de waarde 0. Uit tabel 1 volgt dat

$$(49) \quad d = \hat{x}_2^{(1)} - \hat{x}_2^{(2)} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3h_{22}^{(1)} + 3h_{22}^{(2)} + s^{(1)} - s^{(2)} - 15 \\ -15 \end{pmatrix}$$

en

$$(50) \quad Q_d = Q_{22}^{(1)} + Q_{22}^{(2)} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$V_2^{1*} = (1 \ 1)$	Aansluiting			
	1	2	3	4
d	zie (42)	zie (45)	zie (47)	zie (49)
Q_d (evt. na regularisatie)	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 34 & 32 \\ 32 & 34 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 34 & 31 \\ 31 & 32 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$
Q_d^{-1}	$\frac{1}{44} \begin{pmatrix} 34 & -32 \\ -32 & 34 \end{pmatrix}$	$\frac{3}{127} \begin{pmatrix} 32 & -31 \\ -31 & 34 \end{pmatrix}$	$\frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$
$V_2^{1*} Q_d^{-1}$	$\frac{1}{44} (2 \ 2)$	$\frac{3}{127} (1 \ 3)$	$\frac{3}{2} (1 \ 1)$	$\frac{1}{4} (0 \ 4)$
$(V_2^{1*} Q_d^{-1} V_2^1)^{-1}$	11	$\frac{127}{12}$	$\frac{1}{3}$	1
$Q_d^{-1} V_2^1 (V_2^{1*} Q_d^{-1} V_2^1)^{-1} V_2^{1*} Q_d^{-1}$	$\frac{1}{44} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{3}{127} \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 3/4 & 9/4 \end{pmatrix}$	$\frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
$Q_d^{-1} - Q_d^{-1} V_2^1 (V_2^{1*} Q_d^{-1} V_2^1)^{-1} V_2^{1*} Q_d^{-1}$	$\frac{1}{44} \begin{pmatrix} 33 & -33 \\ -33 & 33 \end{pmatrix}$	$\frac{3}{127} \begin{pmatrix} 31^{3/4} & -31^{3/4} \\ -31^{3/4} & 31^{3/4} \end{pmatrix}$	$\frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$
$Q_d^{-1} (d - \hat{d})$	$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3h_{22}^{(1)} + 3h_{22}^{(2)} + s^{(1)} - s^{(2)} \\ 3h_{22}^{(1)} - 3h_{22}^{(2)} - s^{(1)} + s^{(2)} \end{pmatrix}$			

Tabel 2. Aansluitingsvereffening van de twee waterpasnetwerken bij vier combinaties van keuzen voor de coördinaatdefinitie van de beide netwerken.

Beide matrices $Q_{22}^{(1)}$ en $Q_{22}^{(2)}$ zijn singulier, terwijl ook de som Q_d singulier is. Volgens de theorie mogen we deze singuliere matrix met behulp van de additionele term $V_2^1 V_2^{1*}$ regulariseren. Daar V_2^1 van de vorm

$$(51) \quad V_2^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

is, volgt dat we de covariantiematrix Q_d van (50) mogen vervangen door

$$(52) \quad Q_d = Q_{22}^{(1)} + Q_{22}^{(2)} + V_2^1 V_2^{1*} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Deze matrix is regulier.

Het uniek zijn van $Q_d^{-1} (d - \bar{d})$

Volgens (13 a&b) wordt de term $Q_d^{-1} (d - \bar{d})$ berekend als

$$(53) \quad Q_d^{-1} (d - \bar{d}) = (Q_d^{-1} - Q_d^{-1} V_2^1 [V_2^{1*} Q_d^{-1} V_2^1]^{-1} V_2^{1*} Q_d^{-1}) d$$

Volgens de theorie moet deze term onafhankelijk zijn van de gekozen coördinaatdefinities en van een eventuele regularisering van Q_d . In tabel 2 is de berekening van (53) voor de hierboven genoemde vier gevallen van aansluiting in stappen uitgevoerd, en inderdaad zien we dat de matrix $Q_d^{-1} - Q_d^{-1} V_2^1 [V_2^{1*} Q_d^{-1} V_2^1]^{-1} V_2^{1*} Q_d^{-1}$ en de vector $Q_d^{-1} (d - \bar{d})$ voor alle vier de gevallen identiek zijn.

Literatuur

1. Teunissen, P. J. G., M. A. Salzmann en H. M. de Heus, *Over het aansluiten van puntenvelden (1) — Het rangdefecte lineaire tweede standaardvraagstuk*. NGT Geodesia 1987, no. 5, p. 181-188.
2. Baarda, W., *Statistical Concepts in Geodesy*. Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy, New Series, Vol. 2, No. 4. Delft, 1967.
3. Baarda, W., *A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks*. Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy, New Series, Vol. 2, No. 5. Delft, 1969.
4. Teunissen, P. J. G., *The Geometry of Geodetic Inverse Linear Mapping and Non-Linear Adjustment*. Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy, New Series, Vol. 8, No. 1. Delft, 1985.
5. Adam, J., F. Halmos and M. Varga, *On the Concepts of Combination of Doppler Satellite and Terrestrial Geodetic Networks*. Acta Geodaet., Geophys. et Montanist. Acad. Sic. Hung., Vol. 7 (2), p. 147-170.
6. Peterson, A. E., *Merging of the Canadian Triangulation Network with the 1973 Doppler Satellite Data*. The Canadian Surveyor, Vol. 28, No. 5, p. 487-495.
7. Rummel, R., *Geodetisch gebruik van traagheidsnavigatie en van het Global Positioning Systeem*. NGT Geodesia 1987, no. 1, p. 2-9.
8. Teunissen, P. J. G., *Some Remarks Concerning RETrig Phase III*. IAG, Section I-Networks, Subcommittee for the New Adjustment of the European Triangulation (RETrig), Publ. no. 16, p. 156-160, München, 1986.

Over het aansluiten van puntenvelden (2): De aansluitingsvereffening (vervolg)¹⁾

door dr. ir. P. J. G. Teunissen, ir. M. A. Salzmann en ir. H. M. de Heus, Faculteit der Geodesie van de Technische Universiteit Delft.

7. Een alternatieve formulering met behulp van S-transformaties

Bij de afleiding van (13) hebben we gebruik gemaakt van

¹⁾ Voortzetting van de mini-serie over het aansluiten van puntenvelden; deel 1 werd geplaatst in het meinummer; nu volgt het restant van deel 2 dat in het juninummer werd begonnen.

²⁾ De nummers [1] t.m. [11] verwijzen naar „Literatuur“ op p. 273 aan het eind van dit artikel.

het in tweede standaardvraagstuk vorm geformuleerde model (7). Dit betekende dat we, voordat we de term $Q_d^{-1} (d - \bar{d})$ van (13b) konden berekenen, eerst de transformatievector \hat{i} met behulp van (13a) moesten berekenen. We kunnen echter de oplossing van model (4) ook zo formuleren, dat de berekening van \hat{i} en de bijbehorende transformatie pas achteraf gebeurt. Daartoe herschrijven we oplossing (13) eerst als:

$$a) \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1^{(1)} \\ \hat{x}_2^{(1)} \\ \hat{x}_2^{(2)} \\ \hat{x}_3^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -Q_{12}^{(1)} \\ -Q_{22}^{(1)} \\ +Q_{22}^{(2)} \\ +Q_{32}^{(2)} \end{pmatrix} Q_d^{-1} (d - \hat{d})$$

$$(54) b) \hat{t} = -(S_2^{1*} V_2^{\perp})^{-1} S_2^{1*} (\hat{x}_2 - \hat{x}_2)$$

$$c) \begin{pmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -V_2^{\perp} \\ \perp \\ -V_3 \end{pmatrix} \hat{t}$$

Formules (54a) en (54c) verkrijgen we door (13c) in twee delen te splitsen. Een eerste deel, namelijk (54a), dat afhankelijk is van het verschil $d - \hat{d}$, en een tweede deel, namelijk (54c), dat betrekking heeft op de met behulp van \hat{t} uit te voeren transformatie. Merk op dat \hat{x}_2 en \hat{x}_3 de LKK-schatters zijn van respectievelijk $E\{\hat{x}_2^{(2)}\}$ en $E\{\hat{x}_3^{(2)}\}$. Dus de coördinaatschatters \hat{x}_2 en \hat{x}_3 zijn gedefinieerd in het coördinatenstelsel van het tweede netwerk. Formule (54b) volgt uit de eerste set van vergelijkingen van (54c). Merk op dat \hat{t} onafhankelijk is van de keuze van de basismatrix S_2^{\perp} , mits $S_2^{1*} V_2^{\perp}$ vierkant en regulier is.

Met, zie (14a),

$$(55) Q_d^{-1} (d - \hat{d}) = V_2 (V_2^* Q_d V_2)^{-1} V_2^* d$$

zouden we nu in principe de aansluitingsvereffening volgens (54) kunnen uitvoeren. Een probleem vormt echter nog de berekening van (55). Immers, (55) veronderstelt dat de basismatrix V_2 bekend is. Deze matrix is echter niet a priori bekend en zou daarom nog apart moeten worden opgesteld. Dit probleem bestaat niet in (13), omdat daar de matrix V_2^{\perp} eenvoudig uit de gelineariseerde betrekking van de gelijkvormigheidstransformatie volgt, zie (3). We hebben dus een andere, meer werkbare formulering van (55) nodig. Dit wordt bereikt door gebruik te maken van de *S-transformatie*.

Laat

$$(56) P_{S_2} = I - V_2^{\perp} [S_2^{1*} V_2^{\perp}]^{-1} S_2^{1*}$$

een willekeurige S-transformatie zijn (zie [1], [9], [10], [11]). Dan is S_2^{\perp} een basismatrix zodanig dat $S_2^{1*} V_2^{\perp}$ vierkant en regulier is. Laat S_2 een basismatrix van de nulruimte $N(S_2^{1*})$ zijn. Dan zijn ook de matrices $(S_2^{\perp} : V_2^{\perp})$ en $S_2^* V_2$ vierkant en regulier. Met $S_2^{1*} S_2 = 0$ en $V_2^{1*} V_2 = 0$ volgt dan dat

$$(57) \begin{pmatrix} I - V_2^{\perp} [S_2^{1*} V_2^{\perp}]^{-1} S_2^{1*} \\ S_2^{\perp} [V_2^{\perp} S_2^{\perp}]^{-1} V_2^{\perp} \end{pmatrix} (S_2 : V_2^{\perp}) = \begin{pmatrix} S_2 : 0 \\ S_2 : 0 \end{pmatrix}$$

Hieruit blijkt, aangezien $(S_2 : V_2^{\perp})$ vierkant en regulier is, dat de S-transformatie (56) ook kan worden geschreven als

$$(58) P_{S_2} = S_2 [V_2^* S_2]^{-1} V_2^*$$

We zullen nu met deze formulering van de S-transformatie laten zien dat geldt:

$$(59) P_{S_2}^* [P_{S_2} Q_d P_{S_2}^* + \bar{S}_2^{\perp} S_2^{1*}]^{-1} P_{S_2} = V_2 [V_2^* Q_d V_2]^{-1} V_2^*$$

waarbij de basismatrix \bar{S}_2^{\perp} zodanig is gekozen, dat

$(\bar{S}_2 : \bar{S}_2^{\perp})$ vierkant en regulier is. Met behulp van (58) kunnen we schrijven:

$$(60) [P_{S_2} Q_d P_{S_2}^* + \bar{S}_2^{\perp} S_2^{1*}] = \begin{pmatrix} (S_2^* V_2)^{-1} S_2^* \\ \bar{S}_2^{\perp} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} V_2^* Q_d V_2 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (S_2^* V_2)^{-1} S_2^* \\ \bar{S}_2^{\perp} \end{pmatrix}$$

Deze matrix is regulier, indien de basismatrix \bar{S}_2^{\perp} zo wordt gekozen, dat de matrix $(S_2 : \bar{S}_2^{\perp})$ vierkant en regulier is. Men mag dus bijvoorbeeld voor de basismatrix \bar{S}_2^{\perp} de matrix S_2^{\perp} of de matrix V_2^{\perp} kiezen. De keuze $\bar{S}_2^{\perp} := S_2^{\perp}$ leidt meestal tot de eenvoudigste vorm van (60) (zie voorbeeld).

Inverteren van (60) geeft:

$$(61) [P_{S_2} Q_d P_{S_2}^* + \bar{S}_2^{\perp} S_2^{1*}]^{-1} = \begin{pmatrix} V_2^* S_2^{\perp} (\bar{S}_2^{\perp} S_2^{\perp})^{-1} \bar{S}_2^{\perp} \\ (S_2^{\perp} S_2^{\perp})^{-1} S_2^{\perp} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} (V_2^* Q_d V_2)^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2^* S_2^{\perp} (\bar{S}_2^{\perp} S_2^{\perp})^{-1} \bar{S}_2^{\perp} \\ (S_2^{\perp} S_2^{\perp})^{-1} S_2^{\perp} \end{pmatrix}$$

ofwel:

$$(62) [P_{S_2} Q_d P_{S_2}^* + \bar{S}_2^{\perp} S_2^{1*}]^{-1} = \bar{S}_2^{\perp} (S_2^{\perp} S_2^{\perp})^{-1} S_2^{\perp} V_2 (V_2^* Q_d V_2)^{-1} V_2^* S_2^{\perp} (\bar{S}_2^{\perp} S_2^{\perp})^{-1} \bar{S}_2^{\perp} + S_2^{\perp} (S_2^{\perp} S_2^{\perp})^{-1} (S_2^{\perp} S_2^{\perp})^{-1} S_2^{\perp}$$

Na- en voorvermenigvuldiging met P_{S_2} en zijn getransponeerde geeft tenslotte (59), aangezien geldt:

$$P_{S_2}^* S_2^{\perp} = 0 \quad \text{en} \quad P_{S_2}^* \bar{S}_2^{\perp} (S_2^{\perp} S_2^{\perp})^{-1} S_2^{\perp} V_2 = V_2$$

Hoewel het linkerlid van (59) er ingewikkelder uitziet dan het rechterlid, is het linkerlid toch eenvoudiger te berekenen. Immers, de S-transformatie P_{S_2} is in tegenstelling tot V_2 vrij gemakkelijk op te stellen (zie [1]²). Substitutie van (59) in (55) geeft dan met (54) tenslotte de alternatieve formulering van de oplossing van model (4):

$$(63) \begin{matrix} a) \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1^{(1)} \\ \hat{x}_2^{(1)} \\ \hat{x}_2^{(2)} \\ \hat{x}_3^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -Q_{12}^{(1)} \\ -Q_{22}^{(1)} \\ +Q_{22}^{(2)} \\ +Q_{32}^{(2)} \end{pmatrix} P_{S_2}^* [P_{S_2} Q_d P_{S_2}^* + \bar{S}_2^{\perp} S_2^{1*}]^{-1} P_{S_2} d \\ b) \hat{t} = -(S_2^{1*} V_2^{\perp})^{-1} S_2^{1*} (\hat{x}_2 - \hat{x}_2) \\ c) \begin{pmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -V_2^{\perp} \\ \perp \\ -V_3 \end{pmatrix} \hat{t} \end{matrix}$$

De matrix $P_{S_2} Q_d P_{S_2}^*$ is de singuliere covariantiematrix van de S-getransformeerde verschilvector $P_{S_2} d$. De additionele term $\bar{S}_2^{\perp} S_2^{1*}$ zorgt voor de regularisering.

Noteren we de geregulariseerde covariantiematrix als $\overline{P_{S_2} d, P_{S_2} d^*}$, dan kan (63a) met behulp van de „ x^R ”-formule (8b) ook worden geschreven als:

$$(63a') \begin{pmatrix} \hat{x}_1^{(1)} \\ \hat{x}_2^{(1)} \\ \hat{x}_2^{(2)} \\ \hat{x}_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\hat{x}_1^{(1)}, P_{S_2} d^*} \\ \overline{\hat{x}_2^{(1)}, P_{S_2} d^*} \\ \overline{\hat{x}_2^{(2)}, P_{S_2} d^*} \\ \overline{\hat{x}_3^{(2)}, P_{S_2} d^*} \end{pmatrix} \overline{P_{S_2} d, P_{S_2} d^*}^{-1} \hat{e}_{P_{S_2} d}$$

Vergelijk formule (63a') met (10).

Formule (63) vereenvoudigt drastisch als de coördinaten van beide netwerken met behulp van *dezelfde* oneindig gewogen minimumcondities zijn verkregen. Met de bij deze oneindig gewogen minimumcondities behorende S-transformatie P_{s_2} geldt dan dat:

$$(64) \quad \begin{aligned} Q_{12}^{(1)} P_{s_2}^* &= Q_{12}^{(1)}; & Q_{22}^{(1)} P_{s_2}^* &= Q_{22}^{(1)}; & Q_{22}^{(2)} P_{s_2}^* &= Q_{22}^{(2)}; \\ Q_{32}^{(2)} P_{s_2}^* &= Q_{32}^{(2)}; & P_{s_2} d &= d. \end{aligned}$$

Bovendien zal de transformatievector \hat{t} dan gelijk zijn aan de constante nulvector. Dus in het speciale geval van identieke oneindig gewogen minimumcondities reduceert (63) tot de eenvoudige vorm:

$$(65) \quad \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1^{(1)} \\ \hat{x}_2^{(1)} \\ \hat{x}_2^{(2)} \\ \hat{x}_3^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -Q_{12}^{(1)} \\ -Q_{22}^{(1)} \\ +Q_{22}^{(2)} \\ +Q_{32}^{(2)} \end{pmatrix} (Q_{22}^{(1)} + Q_{22}^{(2)} + \bar{S}_2^{-1} \bar{S}_2^{1*})^{-1} (\hat{x}_2^{(1)} - \hat{x}_2^{(2)})$$

Bij het gebruik van formule (63) voor de aansluitingsvereffening is de rekengang de volgende:

- Men stelt de verschilvector d met bijbehorende covariantiematrix Q_d op.
- De verschilvector d en covariantiematrix Q_d moeten met behulp van de S-transformatie worden getransformeerd, indien de coördinaten van beide netwerken in een verschillend coördinatenstelsel zijn gedefinieerd.
- Na regularisatie en toepassing van de formule van de „ x^R -grootheden“ verkrijgt men de coördinaatschaters in hun oorspronkelijke coördinatenstelsels.
- Na berekening van de transformatieparameters met behulp van (63b) kan men tenslotte volgens (63c) de coördinaatschaters van het tweede netwerk naar het coördinatenstelsel van het eerste netwerk transformeren.

Het zal duidelijk zijn, dat de S-transformatie en de berekening van \hat{t} in (63) niet nodig zijn als beide coördinatenstels in hetzelfde stelsel zijn gedefinieerd.

Vervolg voorbeeld: waterpasnetwerk

Volgens de theorie, zie (55) en (59), moet gelden dat

$$(66) \quad Q_d^{-1} (d - \hat{d}) = P_{s_2}^* [P_{s_2} Q_d P_{s_2}^* + \bar{S}_2^{-1} \bar{S}_2^{1*}]^{-1} P_{s_2} d,$$

waarbij P_{s_2} een willekeurige S-transformatie mag zijn. De berekening van het rechterlid van (66) is in tabel 3 voor de vier in hoofdstuk 6 genoemde aansluitings-

$S_2^{1*} = (0 \ 1)$ $P_{s_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	1	2	3	4
d	zie (42)	zie (45)	zie (47)	zie (49)
Q_d	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 34 & 32 \\ 32 & 34 \end{pmatrix}$ zie (44)	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 34 & 31 \\ 31 & 32 \end{pmatrix}$ zie (46)	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ zie (48)	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ zie (50)
$P_{s_2} Q_d$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$P_{s_2} Q_d P_{s_2}^*$		$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$		
$P_{s_2} Q_d P_{s_2}^* + S_2^{-1} S_2^{1*}$		$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$		
$[P_{s_2} Q_d P_{s_2}^* + S_2^{-1} S_2^{1*}]^{-1}$		$3 \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$		
$P_{s_2}^* [P_{s_2} Q_d P_{s_2}^* + S_2^{-1} S_2^{1*}]^{-1} P_{s_2}$		$3 \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$		
$P_{s_2}^* [P_{s_2} Q_d P_{s_2}^* + S_2^{-1} S_2^{1*}]^{-1} P_{s_2} d$		$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3h_{2'2}^{(1)} + 3h_{2'2}^{(2)} + s^{(1)} - s^{(2)} \\ 3h_{2'2}^{(1)} - 3h_{2'2}^{(2)} - s^{(1)} + s^{(2)} \end{pmatrix}$		

Tabel 3. Aansluiting van twee waterpasnetwerken voor de vier in hoofdstuk 6 genoemde situaties.

situaties in stappen uitgevoerd. Gekozen is voor de S-transformatie berekend met behulp van de basismatrix

$$(67) \quad S_2^{1*} = (0 \ 1).$$

De basismatrix \bar{S}_2^1 van (66) is gelijk gesteld aan (67). Dus $\bar{S}_2^1 = S_2^1$. De bij keuze (67) behorende S-transformatie luidt:

$$(68) \quad P_{S_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1)^{-1} (0 \ 1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vergelijken we tabel 3 met tabel 2, dan zien we dat (66) inderdaad geldt. Merk op dat de covariantiematrix Q_d behorende bij de vierde aansluitingssituatie niet verandert door de S-transformatie. Dit komt omdat in dit geval beide netwerken een gelijke coördinaatdefinitie hebben, welke bovendien overeenkomt met de gekozen S-transformatie (68). Vergelijk ook (63) met (65).

8. Conclusies

In dit artikel hebben we een algemeen aansluitingsmodel geformuleerd, dat rekening houdt met een eventueel rangverlies in de covariantiematrices. We hebben, gebruik makend van de formules voor „x^R-grootheden“, twee oplossingsmethoden (13) en (63) voor de aansluitingsvereffening afgeleid. Een alternatieve afleiding van de twee methoden kan men vinden in [4] en [9]. De twee methoden verhouden zich tot elkaar zoals het eerste en tweede standaardvraagstuk zich tot elkaar verhouden. We hebben laten zien dat, als de som van de covariantiematrices van de aansluitingspunten singulier is, men tot regularisatie kan overgaan. De beschreven regularisatiemethode, voor het eerst bewezen in [4], heeft geen invloed op de te schatten parameters.

De eerste oplossingsmethode (13) komt, op de regularisering na, overeen met de in de literatuur beschreven

methoden voor bijvoorbeeld de aansluiting van satellietnetwerken en terrestrische netwerken, zie [5] en [6]. Daar wordt echter geen rekening gehouden met het eventueel singulier zijn van de covariantiematrices.

In tegenstelling tot de eerste methode wordt bij de tweede methode (63) expliciet gebruik gemaakt van de S-transformatie. Dat wil zeggen, pas nadat de twee coördinaatbestanden middels een S-transformatie naar eenzelfde coördinatenstelsel zijn getransformeerd, vindt de eigenlijke vereffening plaats. Deze methode is dan ook wat omslachtiger dan de eerste methode, omdat in principe de (gelineariseerde) gelijkvormigheidstransformatie tweemaal wordt toegepast.

In het volgende artikel, getiteld „Precisie- en betrouwbaarheidsaspecten van de aansluiting“, zullen we ingaan op de kwaliteitsbeschrijving van de aansluitingsvereffening.

Literatuur

1. Teunissen, P. J. G., M. A. Salzmann en H. M. de Heus, *Over het aansluiten van puntenvelden (1) — Het Rangdefecte Lineaire Tweede Standaardvraagstuk*. NGT Geodesia 1987, no. 5, p. 188-189.
4. Teunissen, P. J. G., *The Geometry of Geodetic Inverse Linear Mapping and Non-Linear Adjustment*. Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy, New Series, Vol. 8, No. 1. Delft, 1985.
5. Adam, J., F. Halmos and M. Varga, *On the Concepts of Combination of Doppler Satellite and Terrestrial Geodetic Networks*. Acta Geodaet., Geophys. et Montanist. Acad. Sic. Hung., Vol. 7 (2), p. 147-170.
6. Peterson, A. E., *Merging of the Canadian Triangulation Network with the 1973 Doppler Satellite Data*. The Canadian Surveyor, Vol. 28, No. 5, p. 487-495.
9. Teunissen, P. J. G., M. A. Salzmann en H. M. de Heus, *Theory of Connecting Geodetic Pointfields, with Applications*. TU Delft, 1987. In druk.
10. Baarda, W., *S-transformations and Criterion Matrices*. Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy, New Series, Vol. 5, No. 1. Delft, 1973.
11. Teunissen, P. J. G., *Generalized Inverses, Adjustment, The Datum Problem and S-transformations*. In: Optimization of Geodetic Networks, p. 11-55. Eds. Grafarend and Sanso. Springer Verlag, 1984.