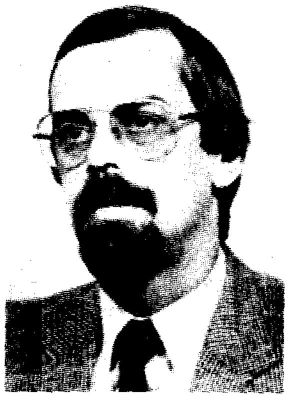
18.

Over het aansluiten van puntenvelden:

Algemene inleiding





door dr. ir. P. J. G. Teunissen, wetenschappelijk onderzoeker verbonden aan de Nederlandse organisatie voor zuiver wetenschappelijk onderzoek (ZWO) en momenteel als gastonderzoeker werkzaam bij de Faculteit der Geodesie van de Technische Universiteit Delft,
ir. M. A. Salzmann, wetenschappelijk assistent bij de Faculteit der Geodesie van de Technische Universiteit Delft, en
ir. H. M. de Heus, universitair hoofddocent aan de Faculteit der Geodesie van de Technische Universiteit Delft.

SUMMARY

On the connection of pointfields

In a series of four articles the authors discuss the general problem of connecting geodetic pointfields. The articles give an overview of the necessary statistical theory, treat the connection adjustment and corresponding quality description and present some worked out practical examples.
The first article, titled ,,The rankdeficient linear second standard problem'' discusses the consequences of a rankdeficiency in the design matrix. The relation with the theory of S-transformations and with the adjustment of free networks is shown.
In the second article a general method is given for connecting pointfields. In particular, attention is given to rankdeficiencies in the coordinate covariance matrices.
The third article discusses the precision and reliability description of the pointfield connection.
Finally the fourth article presents some worked out practical examples. Most of the solutions are given in analytical form.

Onder de titel ,,Over het aansluiten van puntenvelden'' zal door de schrijvers in een viertal afleveringen worden ingegaan op het algemene vraagstuk van de aansluiting van puntenvelden. De artikelen geven een overzicht van de benodigde statistische theorie, behandelen de aansluitingsvereffening en bijbehorende kwaliteitsbeschrijving, en geven enkele uitgewerkte praktische voorbeelden.
Velen zullen het begrip ,,aansluiting'' in eerste instantie wellicht associëren met de zgn. ,,tweede fase'', het aansluiten van een vrij (kring)net aan gegeven RD-coördinaten. Hier wordt onder de gemeenschappelijke noemer ,,aansluiting van puntenvelden'' evenwel een breed scala van actuele landmeetkundige problemen gerangschikt, zoals:

- Inpassing van nieuwe metingen in bestaande puntenvelden.
- Aansluiting van een vrij fotogrammetrisch blok op terrestrische paspunten.
- Het combineren van GPS met bestaande puntenvelden en traditionele plaatsbepalingsmethoden.
- De conversie van bestaand kaartmateriaal naar een digitaal bestand.
- Het combineren (integreren) en bijhouden van digitale bestanden.
- Het kalibreren van digitizers en meetcamera's.
- Deformatiemetingen.

Alhoewel deze problemen op het eerste gezicht soms zeer uiteenlopend zijn, is het gemeenschappelijke in al deze problemen echter toch steeds, dat twee (of meer) sets van coördinaten van puntenvelden onderling via de gemeenschappelijke punten worden aangesloten. Voor de gelineariseerde functionele relaties van het aansluitingsmodel geldt, daar iedere coördinaatbeschrijving van de gekozen coördinaatdefinitie afhangt, dat de coördinaatverschillen van de gemeenschappelijke punten op een gelineariseerde gelijkvormigheidstransformatie (GVHt) en eventuele additionele vervorming na, gelijk aan nul zijn. In symbolische notatie luidt het algemene aansluitingsmodel:

$$\text{coördinaatverschillen} = 0 + f\begin{pmatrix}\text{parameters}\\ \text{GVHt}\end{pmatrix} + g\begin{pmatrix}\text{additionele}\\ \text{parameters}\end{pmatrix}$$

In de laatste term kan bijvoorbeeld een affiene vervorming van gedigitaliseerd kaartmateriaal of een in de fotogrammetrie voorkomende model- of filmvervorming worden verdisconteerd. De aansluitingsvereffening kan nu in principe worden uitgevoerd door het, voor het tweede standaardvraagstuk geldende, kleinste kwadraten algoritme op het bovenstaande aansluitingsmodel toe te passen. Een voorwaarde voor het succesvol kunnen toepassen van dit kleinste kwadraten algoritme is echter, dat de covariantiematrices regulier en dus inverteerbaar zijn. Dit nu is veelal *niet* het geval bij het met behulp van coördinaten aansluiten van puntenvelden. De covariantiematrices van geschrankte coördinaten zijn immers singulier en dus niet inverteerbaar.
In de Nederlandse praktijk zijn twee oplossingsmethoden gangbaar om het bovengenoemde singulariteitsprobleem te vermijden, dan wel te omzeilen:

(1) Via S-transformatie

Naar analogie van de huidige aansluitingsprocedure bij netwerken (zoals bijvoorbeeld geïmplementeerd in de vereffeningsprogrammatuur SCAN-2) wordt met behulp van een van tevoren uit te voeren S-transformatie voor gezorgd, dat beide puntenvelden in een zelfde schrankingsstelsel zijn gedefinieerd. Het schrankingsstelsel wordt dus in het veld van de aansluitpunten gelegd, waarbij twee van de aansluitpunten de schrankingsbasis vormen. De covariantiematrix van de coördinaten van de *overige* aansluitpunten is dan regulier en inverteerbaar. Voor deze aansluitpunten vereenvoudigt het algemene aansluitingsmodel zich dan tot:

coördinaatverschillen = 0

De eerder genoemde additionele parameters komen niet voor in het model, maar worden via speciale alternatieve hypothesen op hun significantie getoetst.

Deze methode kan voor de kringnettenaansluiting als ,,standaardmethode'' worden aangemerkt. De methode is zeer doorzichtig vanwege de eenvoud van het mathematische model en ook omdat het de problematiek van de coördinaatdefinitie — welke de singulariteit in de covariantiematrices veroorzaakt — van de feitelijke aansluitingsberekeningen afsplitst. De methode kent echter ook een aantal praktische nadelen:

- veelal is vooraf een GVH-transformatie of S-transformatie van de coördinaten en hun covariantiematrices nodig;
- de covariantiematrices zijn *altijd* in een schrankingsstelsel gedefinieerd. Hierdoor wordt bijvoorbeeld een eenvoudige diagonaalmatrix voor de ongeschrankte covariantiematrix van de coördinaten (denk hierbij bijvoorbeeld aan gedigitaliseerde coördinaten) na schranking een volle matrix;
- de oplossing van de aansluitingsvereffening wordt altijd verkregen in het vooraf gedefinieerde lokale schrankingsstelsel, zodat vaak na aansluiting nog een na-transformatie van alle berekende coördinaten en hun covariantiematrices nodig is.

(2) Via aanname reguliere covariantiematrix

De tweede oplossingsmethode maakt gebruik van het algemene aansluitingsmodel, maar gaat ervan uit dat de covariantiematrices van de coördinaten regulier zijn. Zo wordt bijvoorbeeld in het blokvereffeningsprogramma FOTEF aangenomen, dat alle covariantiematrices van de coördinaten regulier zijn (in casu diagonaalmatrices). Een dergelijke aanname is te verdedigen voor fotogrammetrische model- of fotocoördinaten en gedigitaliseerde coördinaten, maar is echter niet algemeen geldig. Bovendien levert een dergelijke aansluitingsmethode ,,absolute'' coördinaten, waardoor precisie en betrouwbaarheid niet zonder meer interpreteerbaar zijn; in feite is er nog een transformatie of reductie nodig om de invloed van de (niet-operationele) coördinaatdefinitie op de precisie- en betrouwbaarheidsresultaten te elimineren.

Om de bezwaren tegen beide methoden te ondervangen, is een *algemene* oplossingsmethode van het aansluitingsmodel gewenst, waarbij singulariteiten worden geaccepteerd en adequaat verwerkt. Gezien de formulering van het aansluitingsmodel ligt een oplossing via het tweede standaardvraagstuk voor de hand. De oplossing via het eerste standaardvraagstuk zou overigens (via de eliminatie van de onbekenden om tot voorwaardevergelijkingen te komen) uitmonden in de onder 1. genoemde methode.

In het voorliggende eerste artikel van de reeks, getiteld ,,Het rangdefecte lineaire tweede standaardvraagstuk'', worden de consequenties van een rangdefecte designmatrix besproken. Daarbij zal de relatie worden gelegd met de vereffening van een zgn. vrij netwerk en de theorie van de S-transformatie.

In het tweede artikel wordt een algemene methode voor de aansluiting van puntenvelden gegeven. Hierbij wordt in het bijzonder aandacht geschonken aan de behandeling van eventuele singulariteiten in de covariantiematrices van de coördinaten. De oplossingsmethoden 1. en 2. worden als bijzondere gevallen afgeleid.

Het derde artikel zal gaan over de precisie- en betrouwbaarheidsbeschrijving van de aansluitingsvereffening.

In het vierde en laatste artikel zullen voor de verschillende toepassingen praktische voorbeelden worden uitgewerkt, waarbij (met enige vereenvoudigingen in het kansmodel) veelal analytische oplossingen kunnen worden gegeven.

Over het aansluiten van puntenvelden (1): Het rangdefecte lineaire tweede standaardvraagstuk

door dr. ir. P. J. G. Teunissen, ir. M. A. Salzmann en ir. H. M. de Heus, Faculteit der Geodesie van de Technische Universiteit Delft.

SUMMARY

The rankdeficient linear second standard problem

In this article the consequences of a rankdeficiency in the designmatrix of a linear second standard problem are discussed. The solution space of the linear least-squares estimators of the rankdeficient linear model is characterized through the use of weighted minimum constraints. It is shown that in case of infinitely weighted minimum constraints the linear least-squares estimators become minimum variance linear unbiased estimators of the S-transformed unknown parameters. Also the relation with free network adjustments is shown. No explicit use is made of the theory of generalized inverses.

1. Inleiding

In de geodesie wordt het (lineaire) tweede standaardvraagstuk o.a. gebruikt bij het vereffenen van netwerken en het aansluiten van puntenvelden. Bij de zgn. vrije netwerken kunnen uit het waarnemingsmateriaal de (horizontale/verticale) positie, oriëntatie en schaal van het netwerk niet worden bepaald. In zo'n geval is de designmatrix van het lineaire tweede standaardvraagstuk rang-

defect. Er is dan extra informatie nodig (bijvoorbeeld in de vorm van condities tussen de onbekenden) om dit rangdefect op te heffen.
Bij de vereffening van vrije netwerken is het gebruikelijk vooraf een S-stelsel te definiëren (bijvoorbeeld door het kiezen van twee basispunten in een triangulatienetwerk) en daarmee het rangdefect te elimineren.
In dit artikel zal de algemenere benadering van een rangdefect lineair model met (gewogen) minimum condities worden gevolgd. Uitgaande van het kleinste kwadraten criterium zullen de eigenschappen van de schatters in zowel het rangdefecte als niet-rangdefecte geval worden afgeleid. Het verband tussen de theorie van de S-transformaties en het door ons behandelde lineaire model met (gewogen) minimum condities zal worden afgeleid. Het voordeel van de in dit artikel gevolgde meer algemene benadering is, dat we in de vervolgartikelen over de aansluiting van puntenvelden tot flexibeler oplossingsmethoden kunnen komen.

2. Notatie en enkele begrippen

In het kort wordt een overzicht gegeven van de in de tekst gebruikte begrippen en zal de gekozen notatie worden toegelicht. Voor meer details wordt verwezen naar de appendix in [1]*) of naar het lineaire algebraboek [2].

- Matrices worden met hoofdletters, vectoren met kleine letters geschreven.
- A^* is de getransponeerde van matrix A.
- Een mxn matrix heeft m rijen en n kolommen.
- IR^m staat voor de m-dimensionale Euclidische vectorruimte.
- De *rang* r_A van een matrix A is per definitie gelijk aan het aantal lineair onafhankelijke kolommen van A.
- Een *basismatrix* is een matrix waarvan de kolommen lineair onafhankelijk zijn.
- De lineaire ruimte opgespannen door de kolommen van een mxn matrix A noteren we als R(A). In formulevorm:

  $$R(A) = \{y \in IR^m \mid y = Ax,\ x \in IR^n\}$$

  Deze ruimte wordt de *kolomruimte* of *rangespace* van A genoemd.
- Een matrix B heet een basismatrix van een lineaire ruimte U, indien B een basismatrix is en R(B) = U.
- Een basismatrix waarvan de kolommen loodrecht staan op de kolommen van een basismatrix B, noteren we als $B^\perp$. Dus $B^{\perp *}B = 0$.
- Als B een pxq basismatrix is, dan is $B^\perp$ een px (q − p) basismatrix. Dus matrix $(B : B^\perp)$ is vierkant en regulier (van volle rang).
- We reserveren de hoofdletter V voor een basismatrix van $R(A^*)$. Dus $R(V) = R(A^*)$.
- De vectoren x welke loodrecht staan op de kolomvectoren van de nxm matrix A^* (dus $x^*A^* = 0$ of $Ax = 0$) spannen een lineaire ruimte op, welke de *nulruimte* van A wordt genoemd. Deze ruimte noteren we als N(A). In formulevorm:

  $$N(A) = \{x \in IR^n \mid Ax = 0\}$$
- Volgens afspraak noteren we een basismatrix van N(A) als $V^\perp$. Dus is $R(V^\perp) = N(A)$, $R(V) = R(A^*)$ en $V^{\perp *}V = 0$.
- Notatie: $\triangleq$ per definitie, $\forall$ voor alle; ■ einde bewijs.

*) De nummers [1] t.m. [6] verwijzen naar „Literatuur" op p. 188 aan het eind van dit artikel.

3. Lineaire Kleinste Kwadraten (LKK) schatter

Beschouw het lineaire tweede standaardvraagstuk

$$(1)\qquad \boxed{\underset{m\times 1}{E\{y\}} = \underset{m\times n}{A}\ \underset{n\times 1}{x}\ ,\ \underset{m\times m}{Q_y}\ ,}$$

waarbij
E {.} : de verwachtingsoperator
y : de stochastische m-vector van waarnemingsgrootheden
A : de mxn designmatrix met m>n
x : de n-vector van onbekende parameters
Q_y : de mxm positief definiete covariantiematrix van y
Definieer nu de functie F(x) als:

$$(2)\qquad F(x) \triangleq (y-Ax)^*Q_y^{-1}(y-Ax)$$

Dus F(x) is de gewogen som van de kwadraten van de residuen.
Dan is *per definitie* iedere $\hat{x}$ welke voldoet aan

$$(3)\quad F(x) \geq F(\hat{x})\ ,\ \forall\ x \in IR^n\ ,\ \text{ofwel } F(\hat{x}) \text{ is minimaal},$$

een LKK-schatter van x.

STELLING I

$$(4)\qquad F(x) \geq F(\hat{x})\quad \forall\ x \in IR^n \Leftrightarrow A^*Q_y^{-1}A\hat{x} = A^*Q_y^{-1}y.$$

Bewijs:

Een Taylorontwikkeling van F(x) ten opzichte van x_0 geeft:

$$(5)\qquad F(x) = F(x_0) + \partial_x F(x_0)\Delta x + \tfrac{1}{2}\Delta x^*\partial^2_{xx}F(x_0)\Delta x,$$

waarbij

$$\text{a)}\quad \Delta x = x - x_0$$

$$(6)\ \text{b)}\quad \partial_x F(x_0) = 2(y-Ax_0)^*Q_y^{-1}A$$

$$\text{c)}\quad \partial^2_{xx}F(x_0) = 2A^*Q_y^{-1}A$$

Daar de matrix $\partial^2_{xx}F(x_0)$ positief (semi-)definiet is, zie (6.c), geldt:

$$(7)\qquad \Delta x^*\partial^2_{xx}F(x_0)\Delta x \geq 0,\quad \forall\ x \in IR^n\ .$$

Met (5) geeft dit:

$$(8)\qquad F(x) \geq F(x_0) + \partial_x F(x_0)\Delta x,\quad \forall\ x \in IR^n.$$

(→) Gegeven is dat $F(x) > F(\hat{x})$, $\forall\ x \in IR^n$. Met (8) betekent dit dat

$$(9)\qquad \partial_x F(\hat{x})(x - \hat{x}) = 0,\quad \forall\ x \in IR^n.$$

moet gelden. Dit betekent weer dat $\partial_x F(\hat{x}) = 0$. Met (6.b) volgt dan dat

$$(10)\qquad A^*Q_y^{-1}A\hat{x} = A^*Q_y^{-1}y.$$

(←) Gegeven is dat $A^*Q_y^{-1}A\hat{x} = A^*Q_y^{-1}y$. Met (6.b) volgt dan dat $\partial_x F(\hat{x}) = 0$ en met (8) toont dit dat

$$(11)\qquad F(x) \geq F(\hat{x}),\quad \forall\ x \in IR^n.$$

■

Stelling I leert ons dat, indien we een LKK-schatter $\hat{x}$ van x willen berekenen, we het lineaire stelsel *normaalvergelijkingen*

$$(12)\qquad \boxed{A^*Q_y^{-1}A\hat{x} = A^*Q_y^{-1}y.}$$

moeten oplossen. We kunnen twee gevallen onderscheiden:

a. De rang r_A van matrix A is gelijk aan n: $r_A = n$
In dit geval levert het oplossen van (12) geen problemen op. Immers als A volle rang heeft, dan heeft ook de normaalmatrix $A^*Q_y^{-1}A$ volle rang en is deze matrix inverteerbaar. Met andere woorden, als A volle rang heeft, dan wordt de *unieke* LKK-schatter $\hat{x}$ van x gegeven door

$$(13)\qquad \hat{x} = (A^*Q_y^{-1}A)^{-1}A^*Q_y^{-1}y.$$

b. De rang r_A van matrix A is kleiner dan n: $r_A < n$
Nu is niet direct duidelijk hoe we (12) kunnen oplossen.

Immers, als $r_A < n$, dan kent zowel de designmatrix A als de normaalmatrix $A^*Q_y^{-1}A$ een rangverlies met als gevolg dat $A^*Q_y^{-1}A$ singulier en dus niet inverteerbaar is. $(A^*Q_y^{-1}A)^{-1}$ bestaat daarom niet als $r_A < n$.

In de volgende hoofdstukken worden de verschillende consequenties van $r_A < n$ besproken.

4. Invariantie en nulruimte van A

Daar de rang van een matrix per definitie gelijk is aan het aantal lineair onafhankelijke kolommen van de matrix, betekent $r_A < n$ dat een aantal (namelijk $n - r_A$) kolommen van de mxn matrix A lineair afhankelijk zijn. Met andere woorden, er bestaan niet-nul vectoren $x \in IR^n$ die voldoen aan:

(14) $\quad Ax = 0.$

De lineaire ruimte opgespannen door alle vectoren x welke voldoen aan (14), wordt de nulruimte van A genoemd. Deze ruimte noteren we als N(A).

(15) $\quad N(A) = \{ x \in IR^n \mid Ax = 0 \}$

De kolomruimte van A is de ruimte welke wordt opgespannen door de kolomvectoren van matrix A. Deze ruimte noteren we als R(A).

(16) $\quad R(A) = \{ y \in IR^m \mid y = Ax,\ x \in IR^n \}$

Stel nu dat we een onderling lineair onafhankelijke set van vectoren weten te vinden, welke gezamenlijk de ruimte N(A) opspannen. Dan vormt deze set een *basis* van N(A). Brengen we deze basisvectoren kolomsgewijs onder in een matrix en noteren we deze matrix als $V^{\perp}$, dan is $V^{\perp}$ een basismatrix waarvoor geldt dat:

(17) $\quad AV^{\perp} = 0 \quad \text{en} \quad R(V^{\perp}) = N(A)$

De dimensie van de nulruimte van A is gelijk aan het aantal lineair afhankelijke kolommen van A, dus dim $N(A) = n - r_A$. Hieruit volgt, dat $V^{\perp}$ een nx $(n - r_A)$ basismatrix is.

Met (17) volgt nu, dat de waarnemingsgrootheden E{y} van het lineaire model (1) *invariant* zijn tegenover de transformatie

(18) $$\underset{nx1}{x^{(1)}} = \underset{nx1}{x} + \underset{nx(n-r_A)}{V^{\perp}} \; \underset{(n-r_A)x1}{t}.$$

Immers

(19) $$E\{y\} = Ax = A(x + V^{\perp}t) = Ax^{(1)}.$$

De in de waarnemingsgrootheden E{y} aanwezige informatie is derhalve *niet* voldoende om de onbekende parametervector x eenduidig te bepalen. Verschillende parametervectoren x leveren dezelfde E{y}.

In de geodetische puntsbepaling komen we deze situatie tegen in de zgn. vrije netwerken.

Voorbeeld 1

Beschouw een waterpasnetwerk met n punten. De waarnemingsvergelijkingen zijn van de vorm:

$$E\{h_{ij}\} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_i \\ h_j \end{pmatrix}$$

De dimensie van de nulruimte is gelijk aan 1 en wordt opgespannen door

$$\underset{nx1}{V^{\perp}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}$$

Voorbeeld 2

Beschouw een triangulatienetwerk. De gelineariseerde waarnemingsvergelijkingen van de hoeken zijn van de vorm:

$$E\{\Delta\alpha_{ijk}\} = \begin{pmatrix} \dfrac{-y^0_{ji}}{(l^0_{ji})^2} & \dfrac{x^0_{ji}}{(l^0_{ji})^2} & \dfrac{-y^0_{jk}}{(l^0_{jk})^2} + \dfrac{y^0_{ji}}{(l^0_{ji})^2} & \dfrac{x^0_{jk}}{(l^0_{jk})^2} + \dfrac{-x^0_{ji}}{(l^0_{ji})^2} & \dfrac{y^0_{jk}}{(l^0_{jk})^2} & \dfrac{-x^0_{jk}}{(l^0_{jk})^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta x_j \\ \Delta y_j \\ \Delta x_k \\ \Delta y_k \end{pmatrix}$$

Het zal duidelijk zijn, dat de hoeken invariant zijn tegenover translaties in x en y richting $(\Delta t_x, \Delta t_y)$, tegenover een schaalverandering $(\Delta\lambda)$ en tegenover een rotatie $(\Delta\epsilon)$. De dimensie van de nulruimte is dan ook gelijk aan 4. De nulruimte wordt opgespannen door de kolommen van de basismatrix.

(20) $$\underset{nx1}{V^{\perp}} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & x^0_i & y^0_i \\ 0 & 1 & y^0_i & -x^0_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

De transformatie welke de hoeken invariant laat, luidt dan:

(21) $$\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta x^{(1)}_i \\ \Delta y^{(1)}_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & x^0_i & y^0_i \\ 0 & 1 & y^0_i & -x^0_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t_x \\ \Delta t_y \\ \Delta\lambda \\ \Delta\varepsilon \end{pmatrix}$$

Deze transformatie herkennen we als de gelineariseerde gelijkvormigheidstransformatie.

Doordat verschillende parametervectoren x dezelfde E{y} opleveren, bestaat er geen unieke LKK-schatter $\hat{x}$ van x. Immers als $\hat{x}$ aan het stelsel normaalvergelijkingen (12) voldoet, dan voldoet ook $\hat{x} + V^{\perp}t$ aan (12).

De volgende stelling leert ons hoe we de gehele oplossingsruimte van (12) kunnen karakteriseren.

STELLING II

Laat $\hat{x}_0$ een particuliere oplossing zijn van het stelsel van normaalvergelijkingen (12). Dan bestaat er voor iedere oplossing $\hat{x}$ van (12) een $(n - r_A)$-vector t, zodat $\hat{x}$ te schrijven is als

(22) $$\boxed{\underset{nx1}{\hat{x}} = \underset{nx1}{\hat{x}_0} + \underset{nx(n-r_A)}{V^{\perp}} \; \underset{(n-r_A)x1}{t}}$$

Bewijs:

Daar zowel $\hat{x}$ als $\hat{x}_0$ aan (12) voldoen, volgt dat het verschil $\hat{x} - \hat{x}_0$ voldoet aan

$A^*Q_y^{-1}A(\hat{x} - \hat{x}_0) = 0.$

Dus $\hat{x} - \hat{x}_0 \in N(A^*Q_y^{-1}A)$. Daar $N(A^*Q_y^{-1}A) = N(A)$, volgt dat $\hat{x} - \hat{x}_0 \in N(A) = R(V\ )$. Dit betekent, dat er een $(n - r_A)$-vector t bestaat, zodanig dat $\hat{x} - \hat{x}_0 = V^{\perp}t$.

■

5. Waarom kiezen we voor de LKK-schatter?

We hebben gezien, dat in het geval van een rangdefecte designmatrix A er oneindig veel LKK-schatters bestaan van de parametervector x. De LKK-schatter lijkt daarom in eerste instantie een niet erg praktische schatter. Waarom wordt dan toch zo vaak het LKK-criterium gehanteerd?

Gewoonlijk wordt voor de LKK-schatter gekozen, omdat:

1. Het LKK-criterium intuïtief een redelijk criterium lijkt. Immers het criterium behelst, dat de gewogen som van de kwadraten van de residuen wordt geminimaliseerd.
2. De LKK-schatter en bijbehorende covariantiematrix relatief eenvoudig kunnen worden berekend.
3. De LKK-schatter een zgn. maximum likelihood schatter is, indien y normaal verdeeld is. Van deze eigenschap wordt vooral gebruik gemaakt bij het ontwikkelen van statistische toetsmethoden.
4. Indien $r_A = n$, de LKK-schatter uniek is.
5. Indien $r_A = n$, de LKK-schatter $\hat{x}$ een zuivere schatter is van x.
   Uit $\hat{x} = (A^*Q_y^{-1}A)^{-1}A^*Q_y^{-1}y$ volgt immers met $E\{y\} = Ax$, dat
   $E\{\hat{x}\} = (A^*Q_y^{-1}A)^{-1}A^*Q_y^{-1}E\{y\} = x$
6. Indien $r_A = n$, de LKK-schatter $\hat{x}$ in de klasse van zuiver lineaire schatters van x minimale variantie heeft.

Helaas is de LKK-schatter $\hat{x}$ niet meer uniek, niet meer zuiver en heeft $\hat{x}$ geen minimale variantie meer, indien $r_A < n$. Betekent dit nu dat we de LKK-schatter moeten afschrijven voor die situaties waar $r_A < n$ geldt? Nee, gelukkig niet. Hoewel we dan x niet meer zuiver kunnen schatten, kunnen we nog wel met behulp van $\hat{x}$ bepaalde lineaire functies $\Theta = a^*x$ van x, de zogenaamde *schatbare functies*, zuiver schatten. Bovendien heeft de zuivere schatter $\hat{\Theta} = a^*\hat{x}$ van a^*x in de klasse van zuiver lineaire schatters van a^*x minimale variantie en is deze schatter uniek. Het een en ander is samengevat in de volgende stelling:

STELLING III

i) De lineaire functie van $\Theta = a^*x$ is zuiver schatbaar onder model (1) van p. 182 dan en slechts dan als er een vector $l \in \mathbb{R}^m$ bestaat, zodanig dat

$$(23)\qquad \underset{n\times 1}{a} = \underset{n\times m}{A^*}\ \underset{m\times 1}{l}$$

ii) indien $\Theta = a^*x$ zuiver schatbaar is, wordt de Minimum Variantie Zuiver Lineaire (MVZL)-schatter van $\Theta = a^*x$ gegeven door

$$(24)\qquad \hat{\Theta} = a^*\hat{x}\ ,$$

waarbij $\hat{x}$ een willekeurige oplossing van de normaalvergelijkingen (12) mag zijn.

Voor het bewijs van deze stelling verwijzen we naar [1].

Dat de MVZL-schatter $a^*\hat{x}$ van a^*x *uniek* is, valt eenvoudig in te zien. Uit (23) volgt met (22) dat

$$(25)\qquad \hat{\Theta} = a^*\hat{x} = l^*A\hat{x}\ .$$

en daar $A\hat{x} = A\hat{x}_0$, zie (22) en (17), volgt met (25) dat

$$(26)\qquad \hat{\Theta} = a^*\hat{x} = l^*A\hat{x} = l^*A\hat{x}_0 = a^*\hat{x}_0$$

Merk op, dat $E\{y\} = Ax$ en iedere lineaire functie $l^*E\{y\}$ van $E\{y\}$ zuiver schatbaar is. Hoogteverschillen in een waterpasnetwerk en hoeken en lengteverhoudingen in een triangulatienetwerk zijn dus zuiver schatbare functies.

6. Een particuliere oplossing van de normaalvergelijkingen

We hebben gezien, dat de unieke MVZL-schatter van $\Theta = a^*x$ eenvoudig kan worden berekend als $\hat{\Theta} = a^*\hat{x}$, waarbij $\hat{x}$ iedere LKK-schatter van x mag zijn. We weten ook dat de oplossingsruimte van het stelsel normaalvergelijkingen

$$(27)\qquad A^*Q_y^{-1}A\hat{x} = A^*Q_y^{-1}y\ ,$$

wordt gekarakteriseerd door

$$(28)\qquad \hat{x} = \hat{x}_0 + V^{\perp}t$$

We weten echter nog niet hoe we een particuliere oplossing $\hat{x}_0$ van (27) kunnen berekenen.

STELLING IV

Indien

$$(29)\qquad \begin{cases} \text{matrix } S \text{ een basismatrix is, en} \\ \text{matrix } (S : V^{\perp}) \text{ vierkant en regulier is,} \end{cases}$$

dan is

$$(30)\qquad \boxed{\hat{x}_0 = S[(AS)^*Q_y^{-1}(AS)]^{-1}(AS)^*Q_y^{-1}y\ ,}$$

een LKK-schatter van x onder model (1).

Bewijs:

Daar de matrix $(S : V^{\perp})$ vierkant en regulier is, kunnen we van de volgende herparametrisering gebruik maken:

$$(31)\qquad \hat{x}_0 = (S : V^{\perp})\begin{pmatrix}\hat{\alpha}\\ \cdots \\ \hat{\beta}\end{pmatrix}.$$

Substitutie van (31) in (27) geeft, daar $AV^{\perp} = 0$:

$$(32)\qquad (A^*Q_y^{-1}AS : 0)\begin{pmatrix}\hat{\alpha}\\ \cdots \\ \hat{\beta}\end{pmatrix} = A^*Q_y^{-1}y\ .$$

Vermenigvuldigen we (32) nu voor met $(S : V^{\perp})^*$ dan volgt, daar $V^{\perp *}A^* = 0$:

$$(33)\qquad \begin{pmatrix}(AS)^*Q_y^{-1}(AS) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\alpha}\\ \cdots \\ \hat{\beta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(AS)^*Q_y^{-1}y\\ 0\end{pmatrix}$$

We merken nu op, dat matrix AS een basismatrix is. Immers, zou dit niet het geval zijn, dan moet of a) matrix S een rangverlies hebben, of b) een aantal lineaire combinaties van de kolommen van matrix S in de nulruimte N(A) liggen. Nu is a) uitgesloten, omdat matrix S een basismatrix is en b) is uitgesloten, aangezien $(S : V^{\perp})$ regulier is. Het regulier zijn van $(S : V^{\perp})$ betekent immers, dat geen enkele lineaire combinatie van de kolommen van de matrix S te schrijven is als een lineaire combinatie van de kolommen van matrix $V^{\perp}$. De conclusie luidt dus, dat AS een basismatrix is. Omdat AS volle rang heeft, heeft ook matrix $(AS)^*Q_y^{-1}(AS)$ volle rang. Dus matrix $(AS)^*Q_y^{-1}(AS)$ is inverteerbaar.
Uit (33) volgt dan

$$(34)\qquad \hat{\alpha} = [(AS)^*Q_y^{-1}(AS)]^{-1}(AS)^*Q_y^{-1}y\ ;\ \hat{\beta} = 0.$$

Substitutie in (31) geeft dan tenslotte (30).

■

7. Het rangdefecte lineaire model met gewogen minimumcondities

Laat $S^{\perp}$ een basismatrix van $N(S^*)$ zijn. Dan volgt uit (30), daar $S^*S^{\perp} = 0$ of $S^{\perp *}S = 0$, dat

$$(35)\qquad S^{\perp *}\hat{x}_0 = 0\ .$$

Dit geeft aan, dat de schatter van (30) kan worden verkregen door het LKK-algoritme toe te passen op het model

$$(36)\qquad \begin{array}{l} \text{a)}\quad E\{y\} = Ax\ ,\ Q_y \\ \text{b)}\quad \text{met de restriktie: } S^{\perp *}x = 0 \end{array}$$

Immers uit $S^{\perp *}x=0$ volgt, dat $x \in R(S)$. Met andere woorden, er bestaat een vector α, zodanig dat

(37) $\quad x = S\alpha$

Substitutie van (37) in (36.a) geeft dan $E\{y\}=AS\alpha$. Nu is AS een basismatrix, en wordt de LKK-schatter van α gegeven door $\hat{\alpha}$ van (34). Substitutie van $\hat{\alpha}$ in (37) geeft dan de LKK-schatter $\hat{x}_0$ van (30).

Schrijven we (36) nu als

(38) $$E\left\{\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} A \\ S^{\perp *} \end{pmatrix} x, \quad \begin{pmatrix} Q_y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dan kunnen we de restricties (36.b) *interpreteren* als extra waarnemingsvergelijkingen met een oneindig groot gewicht (d.w.z. de variantie is gelijk aan nul).

Op een vergelijkbare manier kunnen we nu *iedere* LKK-schatter $\hat{x}$ van x interpreteren als zijnde verkregen door toepassing van het LKK-algoritme op het zogenaamde *rangdefecte lineaire model met gewogen minimumcondities:*

(39) $$\boxed{E\left\{\begin{pmatrix} y \\ c \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} A \\ S^{\perp *} \end{pmatrix} x, \quad \begin{pmatrix} Q_y & 0 \\ 0 & Q_c \end{pmatrix}}$$

Dit model wordt verkregen door het rangdefecte lineaire model (1) uit te breiden met de *fictieve* waarnemingsvergelijkingen

(40) $\quad E\{c\} = S^{\perp *}x\ ,\quad Q_c$

Deze fictieve waarnemingsvergelijkingen worden de zgn. *gewogen minimumcondities* genoemd; ,,minimum'', omdat zij de informatie bevatten die minimaal nodig is om het rangdefect van A op te heffen, ,,gewogen'' omdat zij worden behandeld als waarnemingsvergelijkingen met covariantiematrix Q_c.

STELLING V

Indien matrix $S^{\perp}$ een basismatrix is van $N(S^*)$, dan is

(41) $\quad S^{\perp *}V^{\perp}$ vierkant en regulier,

en wordt de LKK-schatter $\hat{x}$ van x onder model (39) met covariantiematrix $Q_{\hat{x}}$ gegeven door:

(42) $$\boxed{\begin{array}{ll} a) & \hat{x} = \hat{x}_0 + V^{\perp}t, \text{ met } t = (S^{\perp *}V^{\perp})^{-1}c \\ b) & Q_{\hat{x}} = Q_{\hat{x}_0} + V^{\perp}Q_tV^{\perp *}\ , \text{ met } Q_t = (S^{\perp *}V^{\perp})^{-1}Q_c(V^{\perp *}S^{\perp})^{-1} \end{array}}$$

Bewijs:

We bewijzen eerst (41). Daar $V^{\perp}$ een $n\times(n-r_A)$ basismatrix is, en $(S : V^{\perp})$ vierkant en regulier is, volgt dat S een $n\times r_A$ basismatrix is. Hieruit volgt dat de basismatrix $S^{\perp}$ van $N(S^*)$ een $n\times(n-r_A)$ matrix is. Dus $S^{\perp *}V^{\perp}$ is vierkant. Stel nu dat $S^{\perp *}V^{\perp}$ singulier is, dan moet een aantal lineaire combinaties van de kolommen van $V^{\perp}$ in $R(S)=N(S^{\perp *})$ liggen. Dit is echter uitgesloten, daar $(S^{\perp}: V^{\perp})$ regulier is. Dus $S^{\perp *}V^{\perp}$ is regulier.

Nu bewijzen we (42). Substitutie van

(43) $$x = (S : V^{\perp})\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

in (39) geeft:

(44) $$E\left\{\begin{pmatrix} y \\ c \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} AS & 0 \\ 0 & S^{\perp *}V^{\perp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Q_y & 0 \\ 0 & Q_c \end{pmatrix}$$

Hieruit volgt direct dat

(45) $\quad \hat{\alpha} = [(AS)^*Q_y^{-1}(AS)]^{-1}(AS)^*Q_y^{-1}y\ .$

Tevens volgt, daar $S^{\perp *}V^{\perp}$ vierkant en regulier is, dat $\beta = (S^{\perp *}V^{\perp})^{-1}E\{c\}$. Dus de LKK-schatter $\hat{\beta}$ van β luidt

(46) $\quad \hat{\beta} = (S^{\perp *}V^{\perp})^{-1}c$

Substitutie van (45) en (46) in (43) geeft dan tenslotte met (30) het resultaat (42.a). De covariantiematrix $Q_{\hat{x}}$ volgt na toepassing van de voortplantingswet op (42.a).

■

Merk op dat, afhankelijk van de gekozen matrix Q_c, de rang van de covariantiematrix $Q_{\hat{x}}$ van $\hat{x}$ kan variëren van r_A tot n. Matrix $Q_{\hat{x}}$ heeft volle rang n en is dus regulier en inverteerbaar als matrix Q_c positief definiet wordt gekozen. Wordt $Q_c=0$ gekozen, dan heeft $Q_{\hat{x}}$ de rang r_A. In dit geval is $Q_{\hat{x}}$ dus singulier en niet inverteerbaar.

In (39) hebben we aangenomen, dat y en c ongecorreleerd zijn. We kunnen echter ook nog een *fictieve* correlatie invoeren. Dit komt er dan op neer, dat we de vector t van (42) stochastisch en gecorreleerd met $\hat{x}_0$ veronderstellen. In plaats van (42) krijgen we dan

(42') $$\boxed{\begin{array}{ll} a) & \hat{x} = \hat{x}_0 + V^{\perp}t \\ b) & Q_{\hat{x}} = Q_{\hat{x}_0} + Q_{\hat{x}_0 t}V^{\perp *} + V^{\perp}Q_{t\hat{x}_0} + V^{\perp}Q_tV^{\perp *} \end{array}}$$

Het bewijs hiervan gaat analoog aan dat van Stelling V en wordt aan de lezer overgelaten.

Vervolg voorbeeld 2

Om het lineaire model (39) op te lossen, moeten we een basismatrix $S^{\perp}$ kiezen, zodat de matrix $S^{\perp *}V^{\perp}$ vierkant en regulier is. Er bestaan oneindig veel matrices welke aan deze eisen voldoen. Voor een triangulatienetwerk is de meest eenvoudige keuze

(47) $$\underset{4xn}{S^{\perp *}} = (\ 0 \quad I_4 \quad 0\ )$$

Het zal duidelijk zijn, dat deze $S^{\perp}$ een basismatrix is. Met $V^{\perp}$ van (20) volgt dan

(48) $$\underset{4x4}{S^{\perp *}V^{\perp}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_i^0 & y_i^0 \\ 0 & 1 & y_i^0 & -x_i^0 \\ 1 & 0 & x_j^0 & y_j^0 \\ 0 & 1 & y_j^0 & -x_j^0 \end{pmatrix}$$

en deze matrix is regulier.

De bij de keuze (43) behorende minimumcondities kunnen nu worden geïnterpreteerd als waarnemingsvergelijkingen voor de coördinaten van de twee netwerkpunten P_i en P_j. Wordt $Q_c=0$ gekozen, dan prikt men de coördinaten van de punten P_i en P_j vast. Wordt $Q_c \neq 0$ gekozen, dan krijgen de coördinaten van P_i en P_j een fictieve variantie Q_c mee.

Ook de bij keuze (47) behorende basismatrix S is van een eenvoudige vorm, namelijk:

(49) $$\underset{nx(n-4)}{S} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Hieruit volgt, dat de LKK-schatter

(50) $$\hat{x}_0 = S[(AS)^*Q_y^{-1}(AS)]^{-1}(AS)^*Q_y^{-1}y$$

wordt verkregen middels het elimineren van de vier, bij de coördinaten van P_i en P_j behorende, kolomvectoren van de designmatrix A.

8. Verband met S-transformaties en schatbare coördinaten

We hebben tot nu toe gezien, dat de LKK-schatter $\hat{x}$ van x onder model (1) niet uniek is als $r_A < n$, dat iedere

LKK-schatter $\hat{x}$ kan worden verkregen als oplossing van het model (39), dat $\hat{x}$ geen MVZL-schatter is van x, dat $a^*\hat{x}$ — met $a \in R(A^*)$ — wel een MVZL-schatter is van a^*x, en dat $a^*\hat{x}$ uniek is. Omdat $a^*\hat{x}$ uniek is, is deze schatter *onafhankelijk* van de gemaakte keuze voor c, Q_c en $S^\perp$ in model (39), mits uiteraard $S^\perp$ zo wordt gekozen, dat $S^{\perp *}V^\perp$ vierkant en regulier is.
Het lijkt een beetje omslachtig om voor de berekening van een MVZL-schatter eerst een $\hat{x}$ te moeten berekenen en dan pas $a^*\hat{x}$. We zullen echter laten zien, dat dit voor één belangrijk speciaal geval niet hoeft. De schatter $\hat{x}_0$ van (30), welke wordt verkregen door model (39) op te lossen met de keuze $c=0$ en $Q_c=0$, is namelijk zelf een MVZL-schatter. De LKK-schatter $\hat{x}_0$ is echter geen MVZL-schatter van x, maar van

$$\boxed{x_0 = P_s x \,, \quad \text{met} \quad P_s \triangleq I - V^\perp (S^{\perp *}V^\perp)^{-1} S^{\perp *}} \tag{51}$$

Eerst laten we zien dat x_0 inderdaad zuiver schatbaar is. Daartoe moeten we aantonen, dat de kolomvectoren van P_s^* in de ruimte $R(A^*)$ liggen, zie Stelling III (i). Nu liggen de kolomvectoren van P_s^* in $R(A^*)$ als zij loodrecht staan op de ruimte $N(A)=R(V^\perp)$. Dus $P_sV^\perp=0$ moet gelden. Dat dit inderdaad geldt, volgt uit de definitie van P_s in (51).
Uit Stelling III (ii) volgt dan dat de MVZL-schatter van P_sx wordt gegeven door $P_s\hat{x}$. Met (42.a) volgt dan dat $P_s\hat{x} = P_s\hat{x}_0$. Tenslotte volgt dan met (30) dat $\hat{x}_0 = P_s\hat{x}_0$. Dus de LKK-schatter

$$\hat{x}_0 = P_s\hat{x}_0 = P_s\hat{x} \tag{52}$$

uit (30) is de MVZL-schatter van (51).

In voorbeeld 2 hebben we laten zien, dat voor een triangulatienetwerk de transformatie

$$x^{(1)} = x + V^\perp t \tag{53}$$

werd gegeven door de gelineariseerde gelijkvormigheidstransformatie. Vermenigvuldigen we (53) nu voor met $(S^{\perp *}V^\perp)^{-1}S^{\perp *}$ en stellen we $S^{\perp *}x^{(1)}=0$, dan volgt:

$$x^{(1)} = (I - V^\perp[S^{\perp *}V^\perp]^{-1}S^{\perp *})x \tag{54}$$

Vergelijken we (54) met (51), dan zien we dat $x^{(1)}$ identiek is aan x_0. Dit laat zien, dat de transformatiematrix P_s van (51) een gelijkvormigheidstransformatie is en dat de componenten van de zuiver schatbare vector x_0 als (Cartesiaanse) coördinaten zijn te interpreteren. We kunnen dan ook spreken over *schatbare coördinaten.* De matrix P_s heet de *S-transformatie.* De S-transformatie maakt het dus mogelijk de in het algemeen niet zuivere LKK-schatters $\hat{x}$ zo te transformeren, dat zuiver schatbare coördinaten worden verkregen.
Er bestaan net zoveel S-transformaties als er basismatrices $S^\perp$ bestaan, waarvoor geldt dat $S^{\perp *}V^\perp$ vierkant en regulier is. De S-transformatie bezit de volgende eigenschap

$$P_{s_1}P_{s_2} = P_{s_1} \tag{55}$$

Voor meer informatie over de (geometrische) interpretatie van de S-transformaties verwijzen we naar [5] en [6].

Vervolg voorbeeld 1
Twee toegestane keuzes voor de basismatrix $S^\perp$ in een vrij waterpasnetwerk zijn:

$$\text{a)} \quad S_1^{\perp *} = (0,0\ldots0,1,0\ldots0)$$
$$\text{(56)}$$
$$\text{b)} \quad S_2^{\perp *} = (1\ldots\ldots\ldots\ldots1)$$

De bij keuze (56.a) behorende S-transformatie luidt dan:

$$P_{s_1} = I_n - \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (1)^{-1}(0,0\ldots0,1,0\ldots0) \,,$$

of

$$P_{s_1} = \begin{pmatrix} 1 & & & -1 & & & \\ & \ddots & & \vdots & & 0 & \\ & & \ddots & \vdots & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & -1 & 1 & & \\ & 0 & & \vdots & & \ddots & \\ & & & \vdots & & & \ddots \\ & & & -1 & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{57}$$

De bij keuze (56.b) behorende S-transformatie luidt:

$$P_{s_2} = I_n - \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (n)^{-1}(1\ldots\ldots\ldots\ldots1)$$

of

$$P_{s_2} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{pmatrix} \tag{58}$$

Andere voorbeelden van S-transformaties voor één-, twee- en driedimensionale netwerken en voor netwerken op de bol en omwentelingsellipsoïde kan men vinden in respectievelijk [3], [4], [5] en [6].

9. Conclusies

In dit artikel hebben we het rangdefecte lineaire tweede standaardvraagstuk besproken. We hebben laten zien, dat iedere LKK-schatter $\hat{x}$ van x onder dit model voldoet aan de normaalvergelijkingen (12). De LKK-schatter $\hat{x}$ is niet uniek en kan worden gekarakteriseerd door $\hat{x} = \hat{x}_0 + V^\perp t$, waarbij $\hat{x}_0$ een particuliere oplossing is van de normaalvergelijkingen. Iedere LKK-schatter $\hat{x}$ kan via het zgn. rangdefecte model met gewogen minimumcondities (39) worden verkregen. De rang van de covariantiematrix $Q_{\hat{x}}$ hangt af van de gekozen matrix Q_c. De rang van $Q_{\hat{x}}$ is minimaal r_A en maximaal n. De LKK-schatter $\hat{x}$ is geen MVZL-schatter van x. De parametervector x is niet zuiver schatbaar, maar bepaalde lineaire functies van $\Theta = a^*x$ van x zijn dat wel.
De MVZL-schatter van $\Theta = a^*x$ wordt gegeven door $\hat{\Theta} = a^*\hat{x}$, waarbij $\hat{x}$ iedere LKK-schatter van x mag zijn. De schatter $\hat{\Theta} = a^*\hat{x}$ van $\Theta = a^*x$ is uniek en dus onafhankelijk van de gewogen minimumcondities. De LKK-schatter $\hat{x}_0$, verkregen met de keuze $Q_c = 0$, is een MVZL-schatter van P_sx, waarbij P_s de bij de gekozen oneindig gewogen minimumcondities behorende S-transformatie is. Daar in het geval van geodetische netwerken de S-transformatie P_s een (gelineariseerde) gelijkvormigheidstransformatie is, kan men spreken over de schatbare coördinaten $x_0 = P_sx$.

De covariantiematrix van schatbare coördinaten is singulier en dus niet inverteerbaar. Bij het met behulp van coördinaten aansluiten van puntenvelden heeft men echter de inverse van de covariantiematrix van de coördinaten nodig. In het volgende artikel, getiteld ,,De aansluitingsvereffening'', zal o.a. worden besproken hoe men genoemde singulariteiten adequaat kan verwerken. (Dit artikel zal worden gepubliceerd in het juninummer van NGT Geodesia.)

Literatuur

1. Teunissen, P. J. G., M. A. Salzmann en H. M. de Heus, *Theory of Connecting Geodetic Pointfields, with Applications*. In druk. 1987.
2. Noble, B., *Applied Linear Algebra*. Prentice-Hall Inc. 1969.
3. Baarda, W., *S-transformations and Criterion Matrices*. Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy, New Series, Vol. 5, No. 1. Delft, 1973.
4. Van Mierlo, J., *Free Networks Adjustment and S-transformations*. DGK, Reihe B, Nr. 252, p. 41-54, 1979.
5. Teunissen, P. J. G., *Generalized Inverses, Adjustment, the Datum Problem and S-transformations*. In: Optimization of Geodetic Networks, p. 11-55. Eds. Grafarend and Sansò. Springer Verlag, 1984.
6. Teunissen, P. J. G., *The Geometry of Geodetic Inverse Linear Mapping and Non-linear Adjustment*. Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy, New Series, Vol. 8, No. 1. Delft, 1985.