

GNSS 자세결정시스템의 미지정수 결정을 위한 기저선 제약을 갖는 LAMBDA 기법

A Baseline Constrained LAMBDA method for an Integer Ambiguity Resolution of GNSS Attitude Determination Systems

박 찬 식*, P.J.G. Teunissen
(Chansik Park and P.J.G. Teunissen)

Abstract : In this paper, an efficient integer ambiguity resolution method for GNSS attitude determination system is described. The proposed method solves the integer least-squares with quadratic equality constraints(ILSQE) problem and shows an expansion of the LAMBDA method can be used to solve it. The solution of ILSQE is shown and an efficient implementation with a LAMBDA based method is given. The method is compared with some other methods. The results of static and dynamic tests show the dramatic improvement of the success rates of integer ambiguity resolution.

Keywords : GNSS, attitude determination, integer ambiguity resolution, LAMBDA

I. 서론

두 개 이상의 안테나로부터의 반송파 위상 측정치와 미지정수 결정기법을 이용하면 롤, 피치 및 요의 정밀한 자세를 구할 수 있음이 알려져 있다. 자세결정에서는 실시간 고 신뢰도의 항법 요구를 만족시키기 위하여 특화된 미지정수 결정기법이 요구된다. GNSS(Global Navigation Satellite System) 자세결정 시스템에 대한 많은 연구가 이루어지고 있으며 이미 상용화된 제품도 소개되었다[1,2]. 그러나 추가의 정보 없이 GNSS 자체만으로는 참 미지정수를 찾을 확률이 충분하지 않으므로 높은 성공률을 갖는 미지정수 결정기법에 대한 요구가 많다.

LAMBDA(Least-squares AMBiguity Decorrelation Adjustment) [3-5] 기법은 대표적인 미지정수 결정기법이며 이미 많은 시스템에서 적용되고 있다. LAMBDA 기법은 기본적으로 정수의 조건을 갖는 정수 최소자승법(ILS: Integer Least-Squares)의 해를 구하는 방법으로 체계적인 이론과 더불어 뛰어난 성능과 계산상의 이점을 갖고 있다. 그러나 LAMBDA 기법은 측위에 기반을 둔 방법으로 자세결정에 적용하기 위하여 수정이 필요하다. 자세결정에서는 두 안테나 사이의 거리 혹은 기저선 벡터의 길이를 이미 알고 있으며, 그 길이가 항체의 움직임에 무관하게 일정하다는 추가의 조건이 있으므로 이를 이용하면 미지정수 검색의 성공률을 더욱더 향상시킬 수 있다. 단순하게는 기저선 벡터의 길이를 모델에 추가하거나 결정된 미지정수의 검색에 이용하는 방법을 적용할 수 있다. 그러나 이러한 방법은 수학적 근거가 희박하고 임계치 결정이 어렵다는 단점이 있다.

본 논문에서는 기존의 ILS 문제에 자세결정에서는 기저선

벡터의 길이를 알고 있고 일정하다는 조건을 추가한 등호의 제한을 갖는 정수 최소자승법(ILSQ: Integer Least Squares with Quadratic Equality Constraints) 문제의 해와 기존의 LAMBDA를 이용한 구현 방법을 소개하고, 실제 구현을 위하여 필요한 기법을 소개하였다. ILSQE의 기본적인 개념은 이미 소개되었지만[10], 본 논문에서는 구체적인 유도과정과 적용 방법 및 실제 구현을 위하여 필요한 검색 시간의 최소화 기법 등을 자세히 나타내었다. 또한 GPS(Global Positioning System) 수신기를 이용하여 측정된 다양한 측정치를 이용하여 제안된 방법의 유용성을 보였다. 제안된 방법은 미지정수 결정의 성공률을 획기적으로 향상시키며 결과적으로 자세 결정 시스템의 신뢰성을 향상시킨다. 따라서 저가의 상용 GPS수신기를 이용하여서도 연속적인 자세를 구할 수 있는 가능성을 높일 수 있다. 또한 단일 주파수 GPS 뿐 아니라 이중 주파수 GPS, 차세대 GPS, 러시아의 GLONASS 및 유럽 연합에서 계획 중인 Galileo에도 아무런 변경 없이 적용할 수 있다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 먼저 2장에서 GNSS를 이용한 자세결정 기법을 소개한다. 3장에서 ILS 문제를 간단히 살펴본 후 ILSQE 문제의 정의와 해법 및 구현 방법을 나타내었다. 여러 종류의 수신기를 이용한 다양한 실험결과와 해석은 4장에 나타내었으며, 마지막 5장에 결론을 나타내었다.

II. GNSS 를 이용한 자세결정

선형화된 GNSS 측정 식은 다음과 같이 표현된다.

$$y = Aa + Bb + e \quad (1)$$

여기서 $y \in R^m$ 는 GNSS 측정치 벡터, a 와 b 는 각각 차수가 n 과 p 인 미지수, e 는 측정 오차 벡터를 나타낸다. 실제로 모든 GNSS 측정 식은 위와 같이 나타낼 수 있다. 일반적으로 측정치 벡터 y 는 실제 측정치와 계산된 측정치의 차로 주어지며 단일 주파수 혹은 이중 주파수 의 이중 차분된 값을 나타낸다. 또한 이 벡터는 반송파 위상 측정치와 코드 의사거리 측정치를 모두 혹은 따로 나타낼 수 있다. 이때

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2007. 8. 21., 채택확정 : 2008. 3. 4.

박찬식 : 충북대학교 전기전자컴퓨터공학부(chansp@chungbuk.ac.kr)

P.J.G. Teunissen : Dept. of Earth Observation and Space Systems of the Delft University of Technology, the Netherlands(P.J.G.Teunissen@tudelft.nl)

※ 이 논문은 2007년 충북대학교 학술연구지원사업의 연구비 지원에 의하여 연구되었음.

벡터 $a \in Z^n$ 는 이중 차분된 미지정수를 나타내며 거리의 단위가 아닌 사이클의 단위를 갖는다. 벡터 $b \in R^p$ 는 기저선 벡터를 나타내며 모델에 따라 대기에 의한 영향이 포함되기도 한다. 정적 혹은 동적 모델인가에 따라 차수가 달라지지만 자세 결정의 경우 기저선의 길이가 짧고 항상 실시간 동적 모델을 사용하므로 본 논문에서는 $p=3$ 인 모델을 고려한다. 미지정수의 차수 n 은 관측되는 위성의 수에 따르며 이중 차분 측정치를 사용하는 경우 $(n+1)$ 개의 위성이 있는 경우 n 개의 미지정수가 있다. 따라서 반송파 위상 측정치만 사용하는 경우 측정치의 차수는 $m=n$ 이 되고, 반송파 위상과 코드 측정치를 동시에 사용하면 측정치의 차수는 $m=2n$ 이 된다.

정수의 제약을 갖는 GNSS 측정 (1)의 해는 다음과 같이 세 단계로 나누어 구할 수 있다. 첫 단계에서는 미지정수에서 정수의 제약조건인 $a \in Z^n$ 을 무시하고 일반 최소자승법을 적용하여 실수 영역에서의 a 와 b , 그리고 공분산 행렬을 구한다. 해는 (2)로 나타낼 수 있으며 실수해로 불린다.

$$\begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Q_{\hat{a}} & Q_{\hat{a}\hat{b}} \\ Q_{\hat{b}\hat{a}} & Q_{\hat{b}} \end{bmatrix} \quad (2)$$

두 번째 단계에서는 실수 영역의 추정치 \hat{a} 을 이용하여 정수 영역에서의 해 \bar{a} 를 구한다. 이는 n 차의 실수 영역에서 n 차의 정수 영역으로의 사상(mapping) $S: R^n \rightarrow Z^n$ 으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{a} = S(\hat{a}) \quad (3)$$

일단 미지정수가 결정되면 이를 이용하여 세 번째 단계에서 b 를 보정한다. 최종적으로 구해진 보정해와 공분산 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{b} &= \hat{b} - Q_{\hat{b}\hat{a}} Q_{\hat{a}}^{-1} (\hat{a} - \bar{a}) \\ Q_{\bar{b}} &= Q_{\hat{b}} - Q_{\hat{b}\hat{a}} Q_{\hat{a}}^{-1} Q_{\hat{a}\hat{b}} \end{aligned} \quad (4)$$

항체에 부착된 두 개 이상의 안테나로부터 얻어진 GNSS 측정치를 이용하면 항체의 정밀한 자세를 구할 수 있다[1,6-10]. (4)의 보정해는 ECEF(Earth Centered Earth Fixed) 좌표 계에서 표현된 벡터이며 좌표변환에 의하여 항법 좌표 계(본 논문에서는 ENU(East North Up) 좌표 계)에서의 벡터, \bar{b}^n 로 변환할 수 있다. 일반적으로 항체는 강체(rigid body)이므로 항법 좌표 계에서의 벡터 \bar{b}^n 와 동체좌표에서 표현된 기저선 벡터를 비교함으로써 항체의 자세를 구할 수 있다. 동체 좌표 계에서의 기저선 벡터, \tilde{b}^n 는 안테나 설치 시에 정확하게 측정해 둘 수 있다. 두 좌표 계에서 표현된 기저선 벡터의 관계는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\tilde{b}^n = C_\phi C_\theta C_\psi \bar{b}^n \quad (5)$$

여기서 C_ψ 는 수직 축을 중심으로 한 회전(요 혹은 방위각(heading)), C_θ 는 수평면에 대한 회전(피치 혹은 양각(elevation)), C_ϕ 는 항체의 진행 방향과 평행한 축을 중심으로 한

회전(롤)을 각각 나타낸다. 좌표변환 행렬 $C_n^b = C_\phi C_\theta C_\psi$ 는 3×3 행렬로 3개의 오일러각 (Euler angles: ϕ, θ 및 ψ)을 포함한다.

주로 방위각과 양각만을 구하는 목적으로 사용되는 GPS compass에는[2,11] 한 개의 기저선 벡터만이 사용되며 이런 경우 직접 자세를 구할 수 있다. 두 안테나 중 하나를 기준 안테나로 정의하고 그 위치가 동체 좌표 계에서 $[0 \ 0 \ 0]^T$, 나머지 안테나는 $[L \ 0 \ 0]^T$ 에 있다고 가정하면, GNSS 측정치를 이용하여 구해진 항법 좌표 계에서의 벡터 $\bar{b}^n = [\hat{x}^n \ \hat{y}^n \ \hat{z}^n]^T$ 를 이용하여 방위각과 양각은 다음 식을 이용하여 구할 수 있다.

$$\psi = -\tan^{-1} \frac{\hat{y}^n}{\hat{x}^n} \quad (6)$$

$$\theta = -\tan^{-1} \frac{\hat{z}^n}{\sqrt{(\hat{x}^n)^2 + (\hat{y}^n)^2}} \quad (7)$$

GPS compass에서 사용된 기법을 확장하여 3차원 자세를 구할 수 있으므로 본 논문에서는 GPS compass를 이용한 이차원 자세 결정에 초점을 두었다.

III. 자세 결정에서의 미지정수 결정 기법

기저선 벡터가 결정되면 (6)과 (7)을 이용하여 쉽게 방위각과 양각을 구할 수 있다. 그러나 정확한 기저선 벡터를 구하기 위해서는 효율적인 미지정수 결정 기법이 필수적이다.

1. 정수 최소자승법(ILS)

실수 영역에서의 \hat{a} 로부터 정수 영역의 미지정수 벡터 \bar{a} 를 결정하는 많은 기법이 있으며 반올림(integer rounding), 부트스트랩(integer bootstrapping) 및 정수 최소자승법이 대표적인 방법이다. 이들 방법 중 GNSS 미지정수 결정 문제에서 적용하려면 무엇보다도 참 미지정수의 결정 확률이 최대가 되는 방법의 선택이 필요하다. 이러한 의미에서 정수 최소자승법은 참 미지정수를 찾을 확률을 최대하는 최적의 방법으로 알려져 있다[12]. 참 미지정수를 찾을 확률은 성공률(success rate)로 불리며, 이 값은 공분산 행렬 $Q_{\hat{a}}$ 만으로 계산된다. 계산에 실제 측정치 등 다른 정보를 필요로 하지 않으므로 성공률은 예측치를 제공할 수 있으며 이러한 이유로 시스템의 설계에 많이 사용된다 [13,14]. 성공률은 다음의 식으로 계산할 수 있다.

$$P(\bar{z} = z) \geq \prod_{i=1}^n (2\Phi(\frac{1}{2\sigma_{z_i}}) - 1) \quad (8)$$

여기서 상보 오차 함수(erfc : complementary error function)는 다음으로 정의된다.

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}z^2) dz \quad (9)$$

또한 표준 편차 σ_{z_i} 는 i^{th} 번째 미지 정수의 조건 분산(conditional variance: $I=1, \dots, i-1$ 미지정수를 조건으로 갖는)의 제곱근으로, 행렬 $Q_{\hat{a}}$ 의 LDLT 분해에 의하여 구해진 행

렬 D 의 대각 항으로부터 구할 수 있다. 구해진 미지정수가 참 값을 보장하기 위해서 성공률은 1에 근접한 충분히 큰 값을 가져야 한다.

정수 반올림 혹은 부트스트랩 기법에서는 해석적인 기법으로 해를 구할 수 있지만 정수 최소자승법에서는 검색에 의하여 해를 구해야 한다. 정수 최소자승법은 LAMBDA 기법에서 체계적으로 정리, 구현되어있으며 많은 참고 문헌들에서 상세한 내용을 다루고 있다[3-5,12-19].

2. 등식 제한을 갖는 정수 최소자승법(ILSQE)

자세 결정 시스템에서는 정확한 기저선 벡터의 길이를 알고 있고 그 값이 일정하다는 추가의 제약 조건이 있으며 이를 이용함으로써 성공률을 높일 수 있다.

2.1 문제의 정의

기저선 길이의 제약 조건 $\|b\|_I = \ell$ 는 다음의 식으로 나타낼 수 있다.

$$\|b\|_I^2 = \ell^2 \tag{10}$$

여기서 $\|\cdot\|_I^2 = (\cdot)^T A^{-1}(\cdot)$, ℓ 은 이미 알고 있는 기저선 벡터의 길이, I 는 (3×3) 의 항등 행렬(identity matrix)를 나타낸다. 위의 조건을 이용하여 기존의 ILS 문제가 자세 결정에서는 (11)를 최소화하는 정수 벡터 $a \in Z^n$ 와 기저선 벡터 $b \in R^3$ 를 찾는 문제가 된다.

$$\min_{a \in Z^n, b \in R^3} \|y - Aa - Bb\|_{Q_y}^2, \text{ subject to } \|b\|_I^2 = \ell^2 \tag{11}$$

ILSQE 문제의 해를 구하기 위해서는 기존의 ILS 해법에서 추가된 기저선 길이의 제약 조건을 고려할 수 있도록 변형하여야 한다. 최소 자승 법에서는 직교 분해로부터 다음의 관계가 성립한다.

$$\|y - Aa - Bb\|_{Q_y}^2 = \|\hat{e}\|_{Q_y}^2 + \|\hat{a} - a\|_{Q_a}^2 + \|\hat{b}(a) - b\|_{Q_{\hat{b}(a)}}^2 \tag{12}$$

여기서 \hat{a} 와 \hat{b} 는 실수 해를, 오차 $\hat{e} = y - A\hat{a} - B\hat{b}$ 를 나타낸다. 또한 보정된 위치 해와 공분산 행렬은 앞의 (4)로 구해진다. 이를 이용하면 (11)은 다음과 같이 변경 된다.

$$\min_{a \in Z^n, b \in R^3} \left\{ \|\hat{a} - a\|_{Q_a}^2 + \|\hat{b}(a) - b\|_{Q_{\hat{b}(a)}}^2 \right\} \text{ subject to } \|b\|_I^2 = \ell^2 \tag{13}$$

또한 (14)의 관계를 이용하면 (13)은 (15)로 나타낼 수 있다. (15)는 다시 (16)로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & \min_{a \in Z^n, b \in R^3} \left\{ \|\hat{a} - a\|_{Q_a}^2 + \|\hat{b}(a) - b\|_{Q_{\hat{b}(a)}}^2 \right\} \\ &= \min_{a \in Z^n} \left\{ \|\hat{a} - a\|_{Q_a}^2 + \min_{b \in R^3} \|\hat{b}(a) - b\|_{Q_{\hat{b}(a)}}^2 \right\} \end{aligned} \tag{14}$$

$$\min_{a \in Z^n} \left\{ \|\hat{a} - a\|_{Q_a}^2 + \min_{b \in R^3, \|b\|_I^2 = \ell^2} \|\hat{b}(a) - b\|_{Q_{\hat{b}(a)}}^2 \right\} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} & \min_{a \in Z^n} \left\{ \|\hat{a} - a\|_{Q_a}^2 + \min_{b \in R^3, \|b\|_I^2 = \ell^2} \|\hat{b}(a) - b\|_{Q_{\hat{b}(a)}}^2 \right\} \\ & \text{with } \bar{b}(a) = \arg \min_{b \in R^3, \|b\|_I^2 = \ell^2} \|\hat{b}(a) - b\|_{Q_{\hat{b}(a)}}^2 \end{aligned} \tag{16}$$

(16)에서 ILSQE 문제에는 기존의 ILS 문제에 $\|\hat{b}(a) - \bar{b}(a)\|_{Q_{\hat{b}(a)}}^2$ 항이 추가되어 있음을 볼 수 있다. 이는

ILSQE에서는 $\|\hat{a} - a\|_{Q_a}^2$ 를 최소화 해야 할 뿐 아니라 동시에 보정된 위치 해 $\bar{b}(a)$ 가 알려진 기저선 벡터의 길이를 반지름으로 갖는 도형의 표면에 가능한 한 가까이 존재해야 함을 나타낸다.

ILS와 마찬가지로 (16)의 해는 해석적인 방법으로 구할 수 없으며 검색에 의하여 구해야 한다. 검색은 기존의 LAMBDA 기법을 이용함으로써 효율적으로 수행될 수 있다.

2.2 미지 정수 검색 범위

미지정수 검색 범위 $\Omega \subset Z^n$ 는 적절히 선택된 상수 χ^2 를 이용하여 다음과 같이 정의된다.

$$\Omega = \left\{ a \in Z^n \mid \|\hat{a} - a\|_{Q_a}^2 + \|\hat{b}(a) - \bar{b}(a)\|_{Q_{\hat{b}(a)}}^2 \leq \chi^2 \right\} \tag{17}$$

χ^2 는 검색 범위 Ω 가 (18)의 해를 포함하도록 결정되어야 한다. 너무 큰 χ^2 는 검색 범위 내에 너무 많은 미지정수 대상 후보를 포함하여 계산 량이 증가하므로 최상의 선택은 (16)의 해가 포함되는 가장 작은 Ω 를 만족시키는 χ^2 를 구하는 것이다.

임의의 $a \in Z^n$ 를 이용하여 다음 식으로 구해진 χ^2 는 (17)의 해가 검색 범위 Ω 에 포함됨을 보장한다.

$$\chi^2 = \|\hat{a} - a\|_{Q_a}^2 + \|\hat{b}(a) - \bar{b}(a)\|_{Q_{\hat{b}(a)}}^2 \tag{18}$$

그러나 임의의 $a \in Z^n$ 로 구해진 χ^2 는 큰 값이 되기 쉽고, 따라서 검색 범위 Ω 내에 너무 많은 수의 미지정수 후보가 존재하게 되는 위험이 있다.

ILSQE에서의 χ^2 의 결정 문제는 부트스트랩 기법을 사용하는 ILS 보다 훨씬 어려워진다. 이는 $\|\hat{a} - a\|_{Q_a}^2$ 를 최소화하는 $a \in Z^n$ 가 $\|\hat{b}(a) - \bar{b}(a)\|_{Q_{\hat{b}(a)}}^2$ 도 최소화 한다는 보장을 하지 못하기 때문이다. 더욱더 심각한 문제는 $\|\hat{a} - a\|_{Q_a}^2$ 를 최소화하는 $a \in Z^n$ 를 이용해도 $\|\hat{b}(a) - \bar{b}(a)\|_{Q_{\hat{b}(a)}}^2$ 가 심각하게 큰 값을 가져 검색이 끝나지 않는 search halting 현상이 종종 발생하는 것이다. 따라서 LAMBDA에서와는 달리 부트스트랩 기법을 이용하여 χ^2 를 결정할 수 없으며, 심지어는 LAMBDA의 해를 이용하여 구해진 χ^2 도 사용할 수 없다.

아직 $\|\hat{a} - a\|_{Q_a}^2 + \|\hat{b}(a) - \bar{b}(a)\|_{Q_{\hat{b}(a)}}^2$ 의 성질에 대해서 알려진 바가 없어 검색 범위를 결정하는데 어려움이 많다. 본 논문에서는 이러한 문제를 피하기 위하여 ‘미지정수 후보가 존재할 때까지 χ^2 의 확장 기법’이라고 이름 붙인 간단한 방법을 사용하였다. 이 방법에서는 처음에 적당히 작은 값의 초기 χ^2 를 이용하여 검색을 수행하고, 만약 검색 범위 내에 (16)

을 만족하는 후보가 하나도 없으면 χ^2 를 증가시켜 다시 검색을 수행하는 방법이다. 구하고자 하는 해가 (16)을 최소화 하는 값이므로 검색범위 내에 후보가 존재한다는 말은 해가 존재한다는 것과 일치한다. 비록 적용된 방법이 매우 단순하지만 search halting 현상을 피하면서 성능을 보장할 수 있는 효율적인 방법이다. 특히 참 미지정수로 구해진 위치해는 기저선 길이를 반지름으로 하는 도형의 표면에 존재하므로 $\|\hat{b}(a) - \check{b}(a)\|_{Q_{\hat{b}(a)}}^2$ 가 작은 값을 가지므로 LAMBDA 기법으로 구해진 미지정수 해 a_{LS} 를 이용하여 계산된 $\chi^2 = \|\hat{a} - a_{LS}\|_{Q_a}^2$ 가 $\|\hat{a} - a\|_{Q_a}^2 + \|\hat{b}(a) - \check{b}(a)\|_{Q_{\hat{b}(a)}}^2$ 에 근접한 값을 가진다. 따라서 한 두 번의 반복으로 해를 구할 수 있는 가능성이 높아지며 이로 인하여 추가되는 계산 량은 크지 않은 장점을 갖는다.

2.3 검색

검색은 두 단계로 이루어진다. 첫 번째 단계에서는 다음을 만족하는 모든 미지정수 후보를 모은다. 이는 기존의 LAMBDA 기법에서의 검색 과정과 동일하며 LAMBDA를 이용하여 효율적으로 수행할 수 있다.

$$\|\hat{a} - a\|_{Q_a}^2 \leq \chi^2 \tag{19}$$

두 번째 단계에서 (19)를 만족하는 모든 미지정수 후보에 대하여 기저선 벡터 $\check{b}(a)$ 를 계산한 후 다음 (20)을 만족시키는 미지정수 만을 모은다.

$$\|\hat{b}(a) - \check{b}(a)\|_{Q_{\hat{b}(a)}}^2 \leq \chi^2 - \|\hat{a} - a\|_{Q_a}^2 \tag{20}$$

최종적으로 (19)와 (20)을 만족하는 $a, \check{b}(a)$ 후보로 구해진 $\|\hat{a} - a\|_{Q_a}^2 + \|\hat{b}(a) - \check{b}(a)\|_{Q_{\hat{b}(a)}}^2$ 중 최소 값을 주는 후보가 원하는 해이며 이것이 ILSQE 문제인 (11)의 해가 된다.

(20)에서 모든 미지정수 후보 $a \in Z^n$ 에 대하여 $\check{b}(a)$ 를 계산해야 한다. 이는 등식의 제한을 갖는 최소자승법(LSQE: Least Squares with Quadratic Equality constraints) 문제로 다음의 방법으로 해를 구할 수 있다.

2.4 $\check{b}(a)$ 의 계산

(16)에서 $\check{b}(a)$ 은

$$\min_{b \in R^3} \|\hat{b}(a) - b\|_{Q_{\hat{b}(a)}}^2 \text{ subject to } \|b\|_l^2 = \ell^2 \tag{21}$$

의 해이며 Lagrange multiplier Λ 를 이용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다. 여기서 Λ 는 $\|\check{b}(a)\|_l^2 = \ell^2$ 를 만족시키는 값으로 결정된다.

$$\check{b}(a) = (I + \Lambda Q_{\hat{b}(a)})^{-1} \hat{b}(a) \tag{22}$$

(22)의 해는 GSVD(Generalized Singular Value Decomposition)를 이용하여 구할 수 있다[20]. 그러나 본 논문에서는 이 문

제가 직교 좌표계(cartesian coordinates)에서 측지 좌표계(geodetic coordinates)로의 좌표 변환 문제와 일치함을 이용하여 직교 투영(orthogonal projection)을 이용하여 SVD를 사용하지 않고 $\check{b}(a)$ 를 계산한다. 이는 (21)이 다음과 동치임을 이용한다.

$$\begin{aligned} \min_{\beta \in R^3} \|\hat{b}(a) - \beta\|_l^2 \text{ subject to } \beta^T Q_{\hat{b}(a)} \beta = \ell^2 \tag{23} \\ \text{with } \hat{\beta}(a) = Q_{\hat{b}(a)}^{-\frac{1}{2}} \hat{b}(a) \text{ subject to } \beta = Q_{\hat{b}(a)}^{-\frac{1}{2}} b \end{aligned}$$

(23)는 $\hat{\beta}(a)$ 을 타원체 $\beta^T Q_{\hat{b}(a)} \beta = \ell^2$ 로 직교 투영하는 문제가 된다. 이는 직교 좌표 계에서 측지 좌표 계로의 변환 문제이며 적은 계산 량으로도 쉽게 구할 수 있다.

2.5 검색 속도의 향상

다음을 이용하면 $\check{b}(a)$ 의 계산을 최소화함으로써 검색 속도를 더욱 더 향상시킬 수 있다. $\forall b \in R^n$ 에 대하여 고유치의 정의로부터 다음이 성립한다.

$$\frac{(\hat{b}(a) - b)^T (\hat{b}(a) - b)}{\lambda_{\max}} \leq \|\hat{b}(a) - b\|_{Q_{\hat{b}(a)}}^2 \leq \frac{(\hat{b}(a) - b)^T (\hat{b}(a) - b)}{\lambda_{\min}} \tag{24}$$

여기서 λ_{\min} 와 λ_{\max} 는 각각 행렬 $Q_{\hat{b}(a)}$ 의 최소 고유치와 최대 고유치를 나타내며 ℓ 은 알고 있는 기저선 벡터의 길이를 나타낸다. 또한 다음의 부등식이 성립한다.

$$\begin{aligned} (\|\hat{b}(a)\| - \ell)^2 &= \min_{\|b\|=\ell} (\hat{b}(a) - b)^T (\hat{b}(a) - b) \\ &\leq (\hat{b}(a) - b)^T (\hat{b}(a) - b), \forall b \in R^3 \text{ with } \|b\| = \ell \end{aligned} \tag{25}$$

$$\|\hat{b}(a) - \check{b}(a)\|_{Q_{\hat{b}(a)}}^2 \leq \|\hat{b}(a) - b\|_{Q_{\hat{b}(a)}}^2, \forall b \in R^3 \text{ with } \|b\| = \ell \tag{26}$$

(25)와 (26)으로부터 (27)의 관계를 얻을 수 있다. (27)로부터 (28)의 관계를 얻으며 이를 이용하면 모든 미지정수 후보에 대하여 $\check{b}(a)$ 를 계산하지 않아도 되므로 검색의 효율을 높일 수 있다.

$$\frac{(\|\hat{b}(a)\| - \ell)^2}{\lambda_{\max}} \leq \|\hat{b}(a) - \check{b}(a)\|_{Q_{\hat{b}(a)}}^2 \leq \frac{(\|\hat{b}(a)\| - \ell)^2}{\lambda_{\min}}, \forall a \in Z^n \tag{27}$$

$$\|\hat{a} - a\|_{Q_a}^2 + \frac{(\|\hat{b}(a)\| - \ell)^2}{\lambda_{\max}} \leq \|\hat{a} - a\|_{Q_a}^2 + \|\hat{b}(a) - \check{b}(a)\|_{Q_{\hat{b}(a)}}^2 \leq \chi^2 \tag{28}$$

2.6 검색 절차

제안된 기법은 LAMBDA 기법을 이용하여 구현될 수 있으며 검색 절차는 다음과 같다.

- 1) 실수해 \hat{a}, \hat{b} 와 공분산 행렬을 이용하여 다음을 계산한다.
 - (a) 행렬 $Q_{\hat{b}(a)} = Q_{\hat{b}} - Q_{\hat{b}\hat{a}} Q_{\hat{a}}^{-1} Q_{\hat{a}\hat{b}}$ 의 최대 고유치 λ_{\max} 를 구한다.
 - (b) 기존 LAMBDA 기법을 이용하여 정수 최소 자승 법의 해 a_{LS} 를 구한다.
 - (c) a_{LS} 를 이용하여 초기 $\chi^2 = \|\hat{a} - a_{LS}\|_{Q_a}^2$ 를 구한다.

2) $\|\hat{a} - a\|_{Q_a}^2 \leq \chi^2$ 을 만족시키는 모든 미지정수 후보 a 에 대하여

(a) 보정된 위치 해, $\hat{b}(a) = \hat{b} - Q_{\hat{b}\hat{a}} Q_{\hat{a}}^{-1} (\hat{a} - a)$ 를 구한다.

(b) $\frac{(\|\hat{b}(a)\| - \ell)^2}{\lambda_{\max}} \leq \chi^2 - \|\hat{a} - a\|_{Q_a}^2$ 을 만족시키는 모든 미지

정수 후보에 대하여 $\tilde{b}(a)$ 과 $\omega(a) = \|\hat{a} - a\|_{Q_a}^2 + \|\hat{b}(a) - \tilde{b}(a)\|_{Q_{\tilde{b}(a)}}^2$ 을 구한다.

3) 검색 범위 Ω 내에 미지정수 후보가 없으면 $\chi^2 = \chi^2 + \nabla\chi^2$ 를 이용하여 2)의 검색 과정을 다시 수행한다. 만약 검색 범위 내에 미지정수 후보가 존재하면 최소의 $\omega(a)$ 값을 갖는 a 가 원하는 해가 된다.

IV. 실험 및 해석

1. 회전하는 40cm 기저선 벡터 실험

제안한 기법은 MATLAB을 이용하여 구현되었으며 두 대의 캐나다 NovAtel사의 12채널 단일 주파수 C/A 코드 GPS 수신기를 이용하여 1996년 7월 10일 수집된 측정치를 이용하여 성능을 검증하였다. 1Hz 주기로 총 2100개의 측정치를 수집하였으며, 미지정수는 매 epoch 측정치를 이용하여 검색하고 후처리 기법으로 구해진 참 미지정수와 비교하여 성능을 분석하였다. 기저선 벡터의 길이는 40cm이며 스텝 모터를 장착하여 1000초 동안 정지한 이후 기저선 벡터를 회전시켰다.

표 1에 매 epoch 미지정수를 검색하는 경우에 대한 실험결과를 요약하였다. 제안한 기법(BC-LAMBDA)과의 성능 비교를 위하여 기존의 LAMBDA, LAMBDA에 기저선 길이의 제약을 추가한 기법(LAM+VAL) 및 ARCE를 구현, 적용하였다. 표에서 기저선 길이를 전혀 이용하지 않는 LAMBDA 기법의 성공률은 약 50% 정도로 아주 낮은 성공률을 나타낸다. LAM+VAL에서는 LAMBDA 기법으로 미지정수 후보를 구하고, 후보 중 가장 작은 목적함수 값을 주는 미지정수 후보를 대입하여 구한 기저선 벡터의 길이 $|\hat{b}(a)|$ 가 $\ell - \delta\ell \leq |\hat{b}(a)| \leq \ell + \delta\ell$ 를 벗어나면 구해진 미지정수가 틀린 것으로 판단하고 다음 미지정수 후보를 이용하여 계산한다. 계산된 기저선의 길이의 허용 범위에 따라 성능이 달라지며 본 논문에서는 실험적으로 가장 나은 성능을 주는 $\pm 1\text{cm}$ 의 허용 범위로 두었다. 표에서 기저선 길이를 이용한 검정을 추가함으로써 25% 이상의 성능 향상을 볼 수 있음을 알 수 있다. 제안한 기법은 항상 참 미지정수를 찾을 수 있었으며, 이는 LAMBDA 기법에 비하여 거의 2배에 가까운 성능 향상을 보여준다. ARCE는 저자 중 한 명이 이미 발표한 제한 조건을 이용한 미지정수 검색 기법으로 ARCE 기법은 기저선의 길이를 이용하여 3차원 검색 범위를 2차원 검색 범위로 줄여 검색 속도를 향상시키는 기법으로 그 유용성이 이미 입증되어 있다[21,22]. 표에서 ARCE 기법은 만족할 만한 결과를 줄 수 있다. 제안한 BC_LAMBDA 방법은 100%의 성공률을 나타내며 이는 제안한 방법의 우수성을 보여준다.

표 1. 검색 기법과 성공률(40cm 기저선 벡터).

Table 1. Search method vs. Success rate(40cm baseline).

Method	Success Rate
LAMBDA	51.1% (1073/2100)
LAM+VAL	78.7% (1653/2100)
ARCE	95.7% (2010/2100)
BC-LAMBDA	100% (2100/2100)

표 2. 평균 검색 시간(초).

Table 2. Average search time(second).

	검색시간
ARCE	0.0386
BC-LAMBDA (χ^2_{true})	0.0111
BC-LAMBDA (χ^2 증가 회수)	0.0159 (933)

표 2에 검색 시간을 나타내었다. 측정은 Matlab의 ‘tic’과 ‘toc’ 함수를 이용하였으며, AMD Athlon XP2000+ 1.67GHz CPU와 768MB RAM을 가진 PC에서 매 초 측정하여 구한 평균 값을 나타내었다. 이 값은 PC의 환경에 따라 달라지므로 절대적인 기준은 되지 못하지만 비교를 위한 상대적인 기준으로는 사용될 수 있다. 표에서 ARCE 기법의 검색 시간은 기저선 길이에 비례함을 볼 수 있다. 이는 ARCE 기법에서는 타원체의 표면을 검색하기 때문에 기저선의 길어지면 타원체의 반지름이 커지고 표면적 또한 커지기 때문이다.

표에서 BC-LAMBDA(χ^2_{true})는 참 미지정수를 이용하여 계산된 χ^2_{true} 를 이용하여 구해진 결과를 나타내며 이는 제안한 방법을 이용하여 얻을 수 있는 최상의 결과이다. 실제로 이보다 많은 계산량을 필요로 하며 이는 제안한 기법에서는 초기에 작은 χ^2 값으로 시작하여 해를 구할 때까지 검색범위를 키우는 방법이므로 이에 따른 계산량이 추가되기 때문이다. 초기 χ^2 값과 검색범위 증가에 필요한 $\nabla\chi^2$ 에 따라 성능이 달라질 수 있지만 본 논문에서는 LAMBDA 기법으로 구해진 미지정수 추정치 a_{ILS} 를 이용하여 계산된 χ^2 의 110% 값을 초기 값으로 사용하였으며, 검색범위 내에 후보가 없으면 $\nabla\chi^2 = \chi^2$ 로 두어 검색범위를 증가시키는 단순한 방법을 사용하였으며 만족할 만한 성능을 보였다. 표의 마지막에 제안한 기법을 사용하는 경우 검색 범위 내에 미지정수 후보가 없어 검색 범위를 증가시킨 횟수를 나타내었다.

그림 1(a)에서 실험기간 동안의 위성 수와 PDOP(Positional Dilution of Precision)를 나타내었다. 그림 (b)에 참 미지정수와 구해진 미지정수를 비교하여 구한 실제 성공률과 (8)을 이용하여 계산된 이론 값을 나타내었다.

그림에서 이론 성공률은 8개의 위성이 있는 경우 90% 부근이다가 위성의 수가 줄어 7개가 되는 순간 70% 부근으로 급격히 떨어짐을 볼 수 있다. 이론 성공률의 평균은 92.8427% 이었지만 실험적으로 구해진 성공률은 100%, 즉 2100번의 시도에서 항상 참 미지정수를 구할 수 있었다. 실험 성공률이 이론 치보다 높은 이유는 (8)의 이론 성공률 계산 과정에서는 기저선 길이 조건이 포함되지 않았기 때

문이다.

그림 (c), (d), (e)에 구해진 방위각, 양각 및 기저선의 길이를 나타내었다. 그림에서 가는 선은 실수 미지정수를 이용하여 구한 자세, 굵은 선은 구해진 정수 미지정수를 이용하여 구한 자세를 나타낸다. 구해진 방위각은 모터를 이용하여 어떻게 안테나를 회전시켰는지를 보여주며, 특히 구해진 양각은 실험에서 두 안테나의 수평이 정확하게 유지되지 않아 안테나의 회전에 따라 양각도 변화함을 볼 수 있다. 처음 1000개의 측정치에 대한 방위각, 양각 및 기저선 길이의 평균 값은 49.65도, -0.70도 및 0.40m였으며, 표준 편차는 0.29도, 0.55도 및 1.9mm이며 이는 오차 해석 결과와 잘 일치한다[8]. 그림 (f)에 실수 미지정수와 정수 미지정수를 이용하여 구해진 수평면의 궤적을 나타내었다, 그림에서 작은 점은 실수 해를 나타내고 굵은 점은 정수 해를 나타낸다. 그림은 정수 해의 정확도를 명확하게 보여준다. 그림에서 가운데 (0m, 0m) 위치에 기준 안테나가 위치하고 있으며 나머지 안테나는 (0.3m, 0.3m) 부근에 정지한 상태로 있다가, 1000초 이후에 반 시계 방향으로 회전을 시작함을 확인할 수 있다.

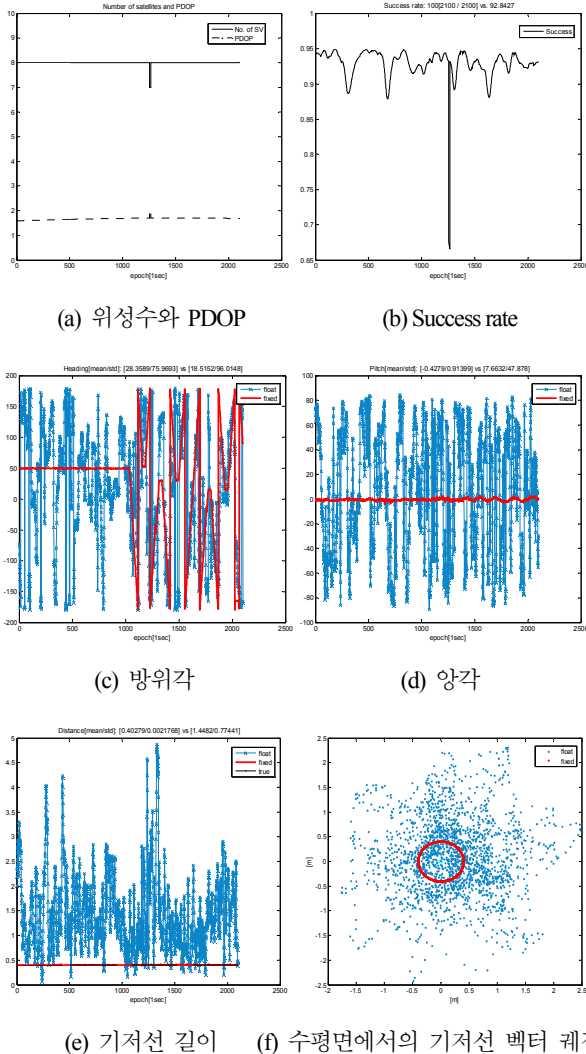


그림 1. 실험 결과(40cm 기저선).
Fig. 1. Experimental results(40cm baseline).

2. 2.5m 기저선 벡터 차량 실험

두 대의 Trimble 4000 SSI Geodetic Surveyor 수신기를 2.5m 간격으로 차량에 설치하여 네덜란드의 Flevo-polder에서 수집된 측정치를 이용하여 자세를 구하였다. 이 측정치는 측지를 위하여 수집되었으나[19] 본 논문에서는 자세를 구하는데 사용하였다. 측정치는 1996년 12월 22일 08시 10분부터 1시간 동안 1초 주기로 수집하였다. 총 3600개의 측정치 중 사이클 슬립이 발생한 4epoch의 측정치를 제외하고 처리하였다. Trimble 4000 수신기는 이중주파수 수신기이지만 성능비교를 위하여 단일 주파수 측정치와 이중 주파수 측정치를 따로 처리하였다.

그림 2에 단일 주파수 측정치에 대한 위성 수와 PDOP과 미지정수 검색 성공률을 나타내었다. 매 epoch 구해진 미지정수와 후 처리로 구해진 참 미지정수를 비교하여 구한 실제 성공률은 98.53% (3543번 성공/3596번 시도)인 반면 (8)로 구한 이론 성공의 평균은 73.95% 이었다.

그림 3에 이중 주파수 측정치에 대한 위성 수와 PDOP과 미지정수 검색 성공률을 나타내었다. L2 주파수에 평균 7.32개, L1과 L2 주파수에 평균 14.68개의 위성이 관측되었고 이에 따라 이론 성공률은 99.997%으로, 실제 성공률은 100%로 향상되었다.

그림 4에 수평면에서 두 안테나의 상대 위치를 나타내었다. (0,0)에 위치한 기준 안테나에 대하여 반경이 2.5m인 원

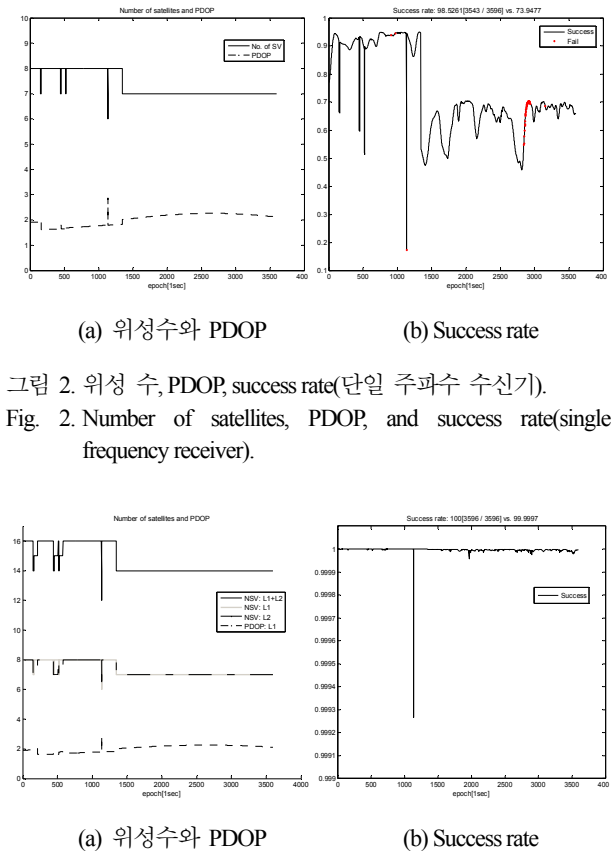


그림 2. 위성 수, PDOP, success rate(단일 주파수 수신기).
Fig. 2. Number of satellites, PDOP, and success rate(single frequency receiver).

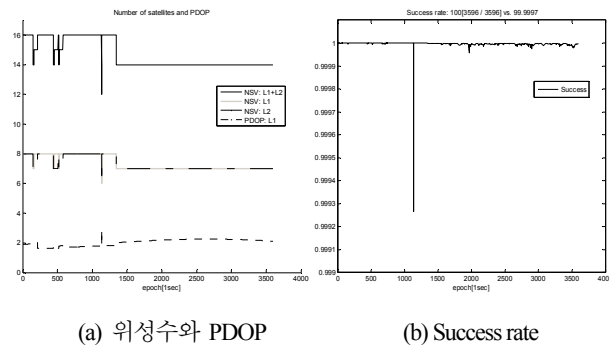


그림 3. 위성 수, PDOP, success rate(이중 주파수 수신기).
Fig. 3. Number of satellites, PDOP, and success rate(dual frequency receiver).

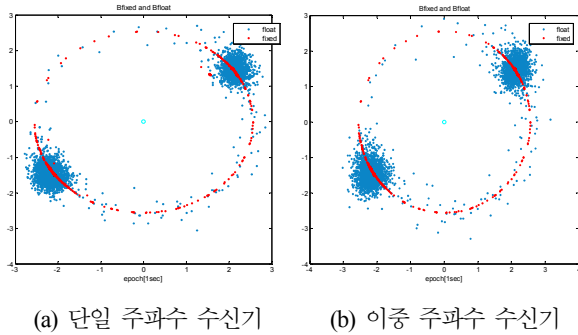
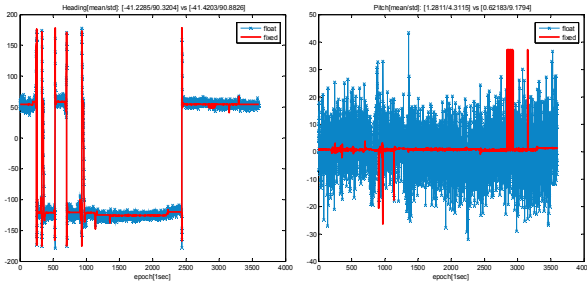
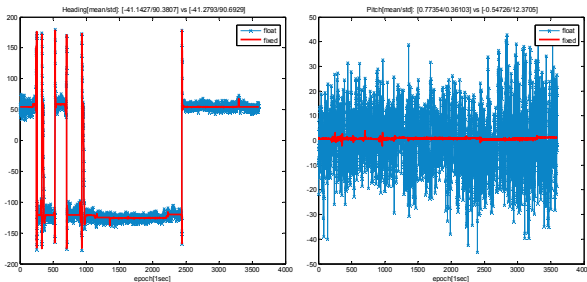


그림 4. 수평면에서의 기저선 벡터 궤적.

Fig. 4. Baseline vector trajectories on horizontal plane.



(a) 방위각(단일 주파수 수신기) (b) 양각(단일 주파수 수신기)



(c) 방위각(이중 주파수 수신기) (d) 양각(이중 주파수 수신기)

그림 5. 구해진 자세(방위각, 양각).

Fig. 5. Determined attitude(heading and elevation angle).

궤적을 나타낸다. 그림에서 가는 점은 실수 미지정수를 이용하여 구한 실수 해를 굵은 점은 구해진 정수 미지정수로 구한 정수 해를 나타낸다. 그림 5에 단일 주파수와 이중 주파수 측정치와 구해진 미지정수를 이용하여 구한 차량의 방위각과 양각을 나타내었다. 차량은 초기 몇 분 동안 멈춘 상태에서 측정치를 수집하다가 10km의 제방을 왕복하였다. 그림에서 구해진 정수 해의 정확도를 확인할 수 있다. 또한 참 미지정수가 구해진 경우와 구하지 못한 경우의 자세의 차이를 확연히 구분할 수 있다. 제안한 기법은 미지정수 결정에 길이의 가중치가 포함되므로 구의 표면에서 미지정수가 결정된다. 따라서 잘못된 미지정수도 구의 표면에 가까운 곳에서 결정되므로 이를 이용하여 구한 자세는 이전의 자세에 비하여 급격한 변화를 나타낸다. 이를 구해진 미지정수의 진위를 확인하는데 사용할 수도 있지만, 본 논문에서는 미지정수 결정기법 자체를 고려하므로 적용하지는 않았다. 추가로, 구해진 양각을 관찰함으로써 차량이 이동하는 상태인지 정지

한 상태인지를 구분할 수 있었다. 운행 일지[19]에 따르면 차량량은 (0 - 180), (708 - 888) 및 (3290 - 3599) 구간에서 정지해 있었다. 그림에서 정지한 상태의 양각의 분산이 움직이는 경우에 비하여 월등히 작음을 확인할 수 있다.

V. 결론

본 논문에서는 GNSS 자세 결정용 시스템에 적용될 수 있는 새로운 미지정수 결정 기법을 제시하였다. 자세결정 시스템에서는 기저선의 길이가 일정하고 이미 알고 있으므로 기존의 정수 최소자승법 문제(ILS)가 등식 제한 조건을 갖는 정수 최소자승법 문제(ILSQE)가 된다. 이는 일반적인 최소자승법 문제에 정수의 조건 이외에 2차의 등식(quadratic equality)을 추가의 조건으로 갖는 문제가 된다. 본 논문에서는 이 ILQE 문제를 정의하고 해를 구하는 방법을 제시하였다. 구해진 해는 ILS 문제에서와 같이 검색에 의하여 구할 수 있으며 그 목적함수는 1) 실수 영역에서의 미지정수와 정수 영역에서의 미지정수의 차와 2) 기저선 길이의 조건을 이용하여 구한 위치와 이용하지 않고 구한 위치의 가중 합으로 정의된다. 처음 항은 기존의 LAMBDA 기법에 의하여 구할 수 있으며, 두 번째 항은 LSQE를 이용하여 해를 구한다. 본 논문에서는 LSQE의 해를 구하는 방법도 나타내었으며 특히 검색 속도를 향상시킬 수 있는 기법도 동시에 제시하였다.

제안된 기법은 기존의 LAMBDA를 기반으로 구현 되었으며 다양한 측정치에 적용하여 그 유용성을 입증하였다. 제안된 방법을 이용하면 기존의 다른 방법에 비하여 적은 계산량으로도 월등히 높은 검색 성공률을 얻을 수 있으며 저가의 단일 주파수 GPS 수신기 만으로도 실시간 자세 결정 시스템을 구축할 수 있을 것으로 기대된다. 또한 제안한 방법은 구해진 위치해가 기저선 길이를 반경으로 하는 구상에 존재하므로 구해진 미지정수의 진위를 판단하기가 용이해져 실제 구현에서 신뢰도의 향상을 얻을 수 있는 추가의 장점을 갖는다.

참고문헌

- [1] Ashtech, "ADU5: GNSS sensors and marine survey solutions," <http://products.thalesnavigation.com/en/products/index.asp>.
- [2] Furuno, "Model SC-120: Satellite compass," <http://www.furuno.co.jp/english/index.html>.
- [3] P. J. G. Teunissen, *Least-squares estimation of the integer ambiguities*. Delft Geodetic Computing Centre LGR series, no. 6., 1993.
- [4] P. J. G. Teunissen, "A new method for fast carrier phase ambiguity estimation," *Proceedings of IEEE Position, Location and Navigation Symposium PLANS'94*, Las Vegas, NV, USA. April 11-15, pp. 562-573, 1994.
- [5] P. J. G. Teunissen, and A. Kleusberg editors, *GPS for Geodesy*, 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1998.
- [6] C. E. Cohen, *Attitude determination using GPS*. Ph.D. Thesis, Stanford University, 1992.
- [7] G. Lu, *Development of a GPS Multi-antenna System for Attitude Determination*, UCGE Reports 20073, Dept. of Geomatics Eng., University of Calgary, 1995.
- [8] 박찬식, "GPS를 이용한 위치결정에서의 오차해석," 제어 자동화 시스템공학회 논문지, 제 7 권 제 6 호, pp. 550-557, 2001.

- [9] M. Ziebart, and P. Cross, "LEO GPS attitude determination algorithm for a macro-satellite using boom-arm deployed antennas," *GPS Solutions*, 6:242-256, 2003.
- [10] Chansik Park, and P. J. G. Teunissen, "A new carrier phase ambiguity estimation for GNSS attitude determination systems," *Proceedings of 2003 International Symposium on GPS/GNSS*, Tokyo, Japan, Nov. 2003.
- [11] C. H. Tu, K. Y. Wang, and W. C. Melton, "GPS compass: A novel navigation equipment," *Proceedings of ION National Technical Meeting*, Santa Monica, CA, USA, 1996.
- [12] P. J. G. Teunissen, "Theory of carrier phase ambiguity resolution," *Proceedings of the 9th GNSS workshop-2002 International Symposium on GPS/GNSS*, November 6-8, Wuhan, China, 2002.
- [13] P. J. G. Teunissen, "Success probability of integer GPS ambiguity rounding and bootstrapping," *Journal of Geodesy*, 72:606-612, 1998.
- [14] S. Verhagen, *Visualization of GNSS-related design parameters. Manual for Matlab user interface VISUAL*, Mathematical Geodesy and Positioning, TU Delft, 2002.
- [15] R. R. Hatch, and H. J. Euler, "Comparison of several kinematic techniques," *Proceedings of ION GPS-94*, Salt Lake City, Utah, USA. September 20-23, pp. 363-370, 1994.
- [16] P. J. Jong de and C. C. J. M. Tiberius, *The LAMBDA method for integer ambiguity estimation: implementation aspects*, Delft Geodetic Computing Centre LGR series, no. 12, 1996.
- [17] P. Joosten, *The LAMBDA-Method: Matlab™ Implementation. Matlab toolbox and manual*, Mathematical Geodesy and Positioning, TU Delft, 2001.
- [18] P. J. G. Teunissen, "GNSS ambiguity bootstrapping: Theory and application," *Proceedings of International Symposium on Kinematic Systems in Geodesy, Geomatics and Navigation*, Banff, Canada, pp. 246-254, 2001.
- [19] C. C. J. M. Tiberius, *Recursive data processing for kinematic GPS surveying*. Ph.D. Thesis, Mathematical Geodesy and Positioning, TU Delft, 1998.
- [20] G. H. Golub and C. F. van Loan, *Matrix computations*. 2nd edition, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland, USA, 1998.
- [22] 손석보, 박찬식, 이상정, "이차원 자세 측정용 GPS 수신기 설계," 한국군사과학기술학회 논문지, 제 3 권 제 2 호, pp. 131-139, 2000.
- [22] 박찬식, 김일선 "GPS를 이용한 자세 측정 시스템의 미지정수 결정기법," 제어 자동화 시스템공학회 논문지, 제 5 권 제 1 호, 1999.



박 찬 식

1961년 10월 1일생. 1984년 서울대학교 제어계측공학과 학사. 1986년, 1997년 동대학원 석사, 박사. 1984년~1997년 삼성 전자 정보통신 책임연구원. 1997년~현재 충북대학교 전기전자컴퓨터공학부 부교수. 관심분야는 GNSS, 자세결정, ITS, WSN.



Peter J.G. Teunissen

Prof.dr. Peter J.G. Teunissen has 20 years of research experience in GNSS Positioning and Navigation. He is the inventor of the LAMBDA method for GNSS carrier phase ambiguity resolution. He is head of the Department of Earth Observation and Space Systems of the Delft University of Technology and member of the Royal Netherlands Academy of Sciences